



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

UEMSTIS

UNIDAD DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
TECNOLÓGICA INDUSTRIAL Y DE SERVICIOS

Probabilidad y Estadística

**Curso de final de
Periodo escolar 2020**



**Academia Nacional
de Matemáticas**

Manual del alumno



Índice

Índice	1
Encuadre	7
Propósito	7
Marco teórico	7
Marco referencial	7
Características del curso	8
Recomendaciones para la impartición del curso	9
Introducción	11
Justificación	12
Bloque 1 Manejo de la información	13
1.1 Población, muestra y tipos de variables.	13
Introducción	13
Actividades de Apertura	13
Actividades de Desarrollo	13
Actividades de Cierre	16
1.2 Tablas estadísticas.	16
Introducción	16
Actividades de Apertura	16
Actividades de Desarrollo	16
Actividades de Cierre	19
1.3 Distribución de frecuencias.	20
Introducción	20
Actividades de Apertura	20
Actividades de Desarrollo	20
Actividades de Cierre	22
Ejercicios Adicionales	23
1.4 Terminología de los datos agrupados.	25
Introducción	25
Actividades de Apertura	25
Actividades de Desarrollo	25
Actividades de Cierre	29
Ejercicios Adicionales	29





1.5 Gráficos estadísticos.	30
Introducción	30
Actividades de Apertura	30
Actividades de Desarrollo	30
Actividades de Cierre	35
Ejercicios Adicionales	35
Bloque 2 Medidas de tendencia central	37
2.1 Media	37
Introducción	37
2.1.1. Media aritmética	37
2.2 Mediana y Moda	39
2.2.1 Mediana	39
2.2.2 Moda	41
Actividades de Apertura	43
Actividades de Desarrollo	44
Actividades de Cierre	44
Ejercicios Adicionales	45
2.3 Cuartiles, deciles y percentiles	46
Introducción	46
2.3.1. Cuartiles	46
2.3.2 Deciles	47
2.3.3 Percentiles	47
Actividades de Apertura	50
Actividades de Desarrollo	50
Actividades de Cierre	51
Actividades de Contextualización o Transversalidad	52
Ejercicios Adicionales	53
Bloque 3 Medidas de dispersión	54
3.1 Rango	54
Introducción	54
Actividades de Apertura	56
Actividades de Desarrollo	56
Actividades de Cierre	57
Actividades de Contextualización o Transversalidad	58
Ejercicios Adicionales	59





3.2 Desviación media	59
Introducción	59
Actividades de Apertura	60
Actividades de Desarrollo	60
Actividades de Cierre	61
Actividades de Contextualización o Transversalidad	62
Ejercicios Adicionales	62
3.3 Varianza y desviación típica o estándar	63
Introducción	63
3.3.1 Varianza	63
3.3.2 Desviación típica o estándar	64
Actividades de Apertura	64
Actividades de Desarrollo	65
Actividades de Cierre	66
Actividades de Contextualización o Transversalidad	66
Ejercicios Adicionales	67
Bloque 4 Medidas de forma	69
4.1 Sesgo	69
Introducción	69
Actividades de Desarrollo	69
4.2 Apuntamiento o curtosis	70
Actividades de Cierre	71
Bloque 5 Medidas de correlación	72
5.1 Coeficiente de correlación	72
Introducción	72
Actividades de Apertura	72
Actividades de Desarrollo	72
Actividades de Cierre	75
Ejercicios Adicionales	76
5.2 Recta de regresión	79
Introducción	79
Actividades de Apertura	79
Actividades de Desarrollo	79
Actividades de Cierre	81
Ejercicios Adicionales	81





5.3 Error estándar de estimación	84
Introducción	84
Actividades de Apertura	84
Actividades de Desarrollo	84
Actividades de Cierre	85
Ejercicios Adicionales	85
6.1 Elementos básicos	87
6.1.1 Diagrama de Venn-Euler	87
Introducción	87
Actividades de Apertura	87
Actividades de Desarrollo	87
Actividades de Cierre	88
6.1.2 Conjunto	88
Introducción	88
Actividades de Apertura	89
Actividades de Desarrollo	89
Actividades de Cierre	90
6.1.3 Subconjunto	91
Introducción	91
Actividades de Apertura	91
Actividades de Desarrollo	91
Actividades de Cierre	91
6.1.4 Pertenencia	92
Introducción	92
Actividades de Apertura	92
Actividades de Desarrollo	93
Actividades de Cierre	93
6.1.5 Conjunto universo	94
Introducción	94
Actividades de Apertura	94
Actividades de Cierre	94
6.1.6 Conjunto vacío	95
Introducción	95
Actividades de Apertura	95
Actividades de Desarrollo	95





Actividades de Cierre	95
6.2 Operaciones con conjuntos	96
6.2.1 Unión	96
Introducción	96
Actividades de Apertura	96
Actividades de Desarrollo	96
Actividades de Cierre	97
6.2.2 Intersección	98
Introducción	98
Actividades de Apertura	98
Actividades de Desarrollo	98
Actividades de Cierre	99
6.2.3 Complemento	100
Introducción	100
Actividades de Apertura	100
Actividades de Cierre	101
6.2.4 Diferencia	101
Introducción	101
Actividades de Apertura	101
Actividades de Desarrollo	102
Actividades de Cierre	103
6.3 Representación de operaciones mixtas con hasta tres conjuntos	103
Introducción	103
Actividades de Apertura	103
Actividades de Desarrollo	104
Actividades de Cierre	105
Bloque 7 Técnicas de Conteo	106
7.1 Elementos básicos	106
Introducción	106
Actividades de Apertura	106
Actividades de Desarrollo	107
Actividades de Cierre	108
7.1.2. Espacio muestral, evento y diagrama de árbol	109
Introducción	109
7.2 Principio fundamental de la multiplicación	111





Introducción	111
7.3 Principio fundamental de la suma	113
7.3.1 Notación factorial	115
7.3.1.1 operaciones con factoriales, combinaciones y permutaciones	115
Actividades de Apertura	115
7.4 Combinaciones y Permutaciones	116
Actividades de Cierre	117
7.4.1 Permutaciones	118
Actividades de Apertura	118
Actividades de Desarrollo	118
Actividades de Cierre	119
7.5 Teorema de Bayes	120
Introducción	120
Actividades de Apertura	121
Actividades de Cierre	122
Fuentes consultadas	124
Directorio	125
Academia Nacional de Matemáticas	126





Encuadre

Propósito

Desarrollar habilidades y capacidades para el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes de Bachillerato Tecnológico, y que favorezcan el desarrollo de su perfil de egreso. Propiciar en el alumno el interés por aprender, relacionar, interpretar, inferir, interpolar, inventar, aplicar, los saberes a la resolución de problemas, desde una óptica lógica-matemática.

Marco teórico

Los seres humanos somos capaces de conocer el mundo a través del lenguaje, del análisis lógico-matemático, de la representación espacial, del pensamiento musical, del uso del cuerpo para resolver problemas o hacer cosas, de una comprensión de los demás individuos y de una comprensión de nosotros mismos. Donde los individuos se diferencian es en la intensidad de sus habilidades y en las formas en que recurre a esas mismas y se les combina para llevar a cabo diferentes labores, para solucionar diversos problemas y progresar en distintos ámbitos.

Las personas aprenden, representan y utilizan el saber de muchos y diferentes modos, estas diferencias desafían al sistema educativo que supone que todo el mundo puede aprender las mismas materias del mismo modo y que basta con una medida uniforme y universal para poner a prueba el aprendizaje de los alumnos.

Marco referencial

Es importante que al analizar los procesos del aprendizaje de las matemáticas los alumnos han experimentado una serie de estrategias por parte de los facilitadores, para que las competencias las transfieran en situaciones de la vida real, exige relacionar, interpretar, inferir, interpolar, inventar, aplicar, los saberes a la resolución de problemas, intervenir en la realidad o actuar previendo la acción y sus contingencias; es decir, reflexionar sobre la acción y saber actuar ante situaciones imprevistas o contingentes.

El aprendizaje por competencias está directamente relacionado con las condiciones que deben darse para que los aprendizajes sean los más significativos, situados y funcionales posibles.

La evaluación del aprendizaje de competencias, responde a la evaluación de contenidos; pero no toda la evaluación está referida a ello. Si consideramos que la evaluación es un aspecto complejo donde convergen diferentes dimensiones, entonces debemos considerar que están implicados procesos de evaluación también complejos.

El proceso de evaluación de las competencias consistirá en utilizar los medios que permitan reconocer si los esquemas de actuación emprendidos por el estudiante pueden serle de utilidad para superar situaciones reales en contextos concretos lo más aproximados a la realidad; para evaluarla es necesario tener datos fiables sobre el grado de aprendizaje de cada estudiante con relación a la competencia implicada, para ello se requiere el uso de instrumentos y medios diversos en función de las características propias de cada competencia y los distintos contextos donde ésta debe o puede llevarse a cabo.





Dado que las competencias están constituidas por uno más contenidos de aprendizaje, es necesario identificar los indicadores de logro para cada uno de ellos, pero integrados o que se puedan integrar en la competencia correspondiente y el medio para conocer el grado de su aprendizaje será la intervención del estudiante ante la situación problemática planteada. La evaluación bajo el enfoque de competencias no solo implica evaluar el resultado del aprendizaje del alumno, también el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que conlleva a que en paralelo también el facilitador va desarrollando, aprendiendo y evaluando bajo el enfoque de competencias, su propia praxis educativa.

Características del curso

El curso, tal y como aparece en el manual, tiene una duración de 30 horas, mismas que se distribuyen en 5 horas por semana en un periodo de 6 semanas de trabajo. La modalidad del curso requiere que el 90% del tiempo se dedique a la realización de ejercicios y dinámicas, en las que los participantes tienen que involucrarse y desempeñarse exitosamente.

El curso está basado en una estrategia didáctica de participación activa, la cual implica un compromiso entre el facilitador y los alumnos para alcanzar los objetivos del curso. La participación activa, aunada al tipo de ejercicios, permitirá crear las condiciones para estimular un trabajo en el que prevalezca la intención comprometida, de cada uno de los participantes, para analizar y extraer las características más relevantes de las situaciones problemáticas; discutir y encontrar formas de solución de los problemas y elegir, entre ellas, las más eficaces, así como fundamentar, en todo momento, el porqué de la estrategia de solución.

Un escenario de este tipo crea las condiciones que propician aprendizajes significativos, donde lo más importante radica en ser consciente de lo que hago y para qué lo hago, y no sólo de solucionar el problema. En esta perspectiva, el facilitador está comprometido a supervisar de manera permanente el trabajo de sus participantes, orientar y retroalimentar a los pequeños grupos y en las plenarios, respetando los procesos de discusión y los argumentos que conduzcan al entendimiento y solución de los ejercicios, atender las dudas individuales y propiciar, siempre, la participación activa y comprometida de los asistentes. Asimismo, el facilitador deberá realizar las siguientes actividades:

1. Al inicio del curso, el facilitador explicará los objetivos, duración, dinámica y compromisos que se adquieren al asistir al mismo.
2. Promover la utilización la metodología del aula inversa a través de videos que aclaren el desarrollo de las actividades a realizar en cada sesión del curso. Dichos videos han sido seleccionados de la plataforma *Khan Academy* y *YouTube* y serán analizados por los alumnos el día anterior como una actividad extra clase a la sesión correspondiente de cada uno de los temas.
3. Motivar a la lectura y discusión previa al estudio de cada temática de los antecedentes correspondientes plasmados en las partes introductorias de cada rubro, ya sea de manera individual o por equipo.
4. Realizar las actividades de apertura, desarrollo y cierre a cada temática, así como las actividades de contexto proporcionando en todo momento la asesoría y seguimiento del desempeño de los alumnos en la resolución de ejercicios para el aprendizaje y habilidad matemática. Se resolverán ejercicios de manera individual y por equipos, marcando un tiempo para su realización, al término del cual se socializarán en plenaria las soluciones.





5. Asignar tareas de ejercicios adicionales para fomentar en los alumnos hábitos y actitudes propios de la actividad matemática y reflexionar sobre las propias estrategias utilizadas en las actividades realizadas en el aula.

Recomendaciones para la impartición del curso

Dadas las circunstancias de carácter extraordinario que preceden al trabajo en el aula mediante las actividades propuestas en el presente manual, el docente tendrá la oportunidad de adoptar estrategias que permitan la participación más activa de los alumnos que previamente han desarrollado los aprendizajes esperados para ciertos contenidos centrales y específicos del programa. Promoviendo el aprendizaje colaborativo permitiendo que:

1. Se incremente la motivación, las interacciones, los alumnos colaboran y aprenden unos de otros, equilibrando el ritmo de trabajo en un ambiente general de autosuperación.
2. Los estudiantes estén motivados a dar lo mejor de sí para contribuir a los éxitos de los demás o, en su caso, del equipo.
3. Ayude a mejorar en el grupo la empatía y el asertividad.
4. Se produzcan entornos educativos que favorezcan el interés y la implicación.

Competencias a desarrollar en el curso

COMPETENCIA	ATRIBUTOS
1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	1. Enfrentan las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
	2. Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos, mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.	1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
	2. Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en que se encuentra y los objetivos que persigue.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
	6. Utiliza las TIC para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
	3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos grupos de trabajo.





Antes de Comenzar

Te sugerimos que antes de iniciar cualquier trabajo de este curso crees una cuenta en la plataforma *Khan Academy* de la siguiente manera:

Entra a <https://es.khanacademy.org/> y da *click* en “Iniciar sesión” si ya tienes una cuenta, en caso contrario da *click* en “Crear una cuenta” y llena el formulario. Necesitaras una cuenta de correo electrónico para la creación de tu cuenta, de preferencia Gmail.

En caso de no contar con una cuenta de correo electrónico en Gmail, créala accediendo a la página www.gmail.com y créala dando *click* en “Agregar cuenta” y llena el formulario. Tu cuenta de correo Gmail debe tener la siguiente estructura:

primerapellido.primernombre.grupoturno@gmail.com

Por ejemplo:

sandoval.jesus.1gm@gmail.com

Te dejamos unos *videos tutoriales* por alguna duda que puedas tener acerca de la creación de las cuentas de ambas plataformas:

“Tutorial- como crear un correo Gmail”:

<https://www.youtube.com/watch?v=CfEbcvZVDGw>

“TUTORIAL 1 Introduccion a Khan Academy español”:

<https://www.youtube.com/watch?v=kiYKcpRgMDk>



Códigos QR

Hemos incluido en el presente manual, códigos de respuesta rápida o códigos QR para que utilices tu dispositivo móvil (teléfono inteligente o tableta) y puedas visualizar los videos recomendados en algunos temas que te servirán de apoyo en tu aprendizaje. Un código QR es la evolución del código de barras. Es un módulo para almacenar información en una matriz de puntos o en un código de barras bidimensional.

¿Cómo se lee el código QR?

La matriz de puntos en la que se guardan los datos no es legible para el ojo humano. Se debe leer con un teléfono móvil o con un dispositivo que disponga de la aplicación correspondiente (un lector de códigos QR). La lectura del código se lleva a cabo en cuestión de segundos.

Además, gracias a la corrección de errores, la lectura también funciona si falta alguna pieza en el código.

Te recomendamos instalar el lector de códigos QR correspondiente a tu dispositivo móvil que podrás encontrar en el siguiente enlace:



<http://www.codigos-qr.com/lectores-codigos-qr/>



Introducción

Uno de los aspectos más fascinantes del proceso de enseñanza- aprendizaje, es la diversidad de concepción de la realidad, factor con el que se deben enfrentar los actores de la educación; a saber: Docentes, alumnos y padres de familia. Esto, en lugar de ser una debilidad, podría traducirse como una oportunidad.

Los procesos de aprendizaje de las matemáticas requieren de estrategias pertinentes, que favorezcan las competencias genéricas y disciplinares en un ambiente agradable y motivante, que le permita al estudiante relacionar los contenidos aprendidos en el aula, con los fenómenos naturales y sociales de su realidad según su contexto social.

Este manual es el producto del arduo trabajo que en conjunto realizó la academia nacional de matemáticas de la UEMSTIS (DGETI) y se presenta como una estrategia, que les permita a los alumnos de nivel medio superior, de segundos, cuartos y sextos semestres, adquirir los conocimientos mínimos para incorporarse con los aprendizajes significativos necesarios al siguiente nivel escolar. Además, se pretende que con su uso pertinente y la mediación del docente, se pueden lograr alcanzar las competencias genéricas y disciplinares del área matemática, continuando con el desarrollo académico sistemático, a través de la propia construcción del conocimiento del sentido numérico, necesario para que pueda transitar eficientemente hacia la abstracción que representa en su nivel particular, el sentido geométrico, el cambio variacional y los fenómenos probabilísticos.

Este curso remedial- presencial está planeado para realizarse con una duración de 5, 6 o 7 semanas, a partir de las fechas que establezcan oficialmente la Secretaría de Educación Pública y los gobiernos de los estados, **para el cierre del ciclo escolar o propedéutico para el siguiente ciclo**, y está diseñado para todos los alumnos, es decir, para aquellos que trabajaron en línea por diferentes medios y para los que no tuvieron el recurso para ello y deberán asistir, participar activa y dinámicamente en la construcción de sus aprendizajes y la solución de problemas planteados en los manuales.

Cada tema del manual contiene la introducción del tema, actividades de apertura, desarrollo, cierre y ejercicios complementarios. Quedando a criterio del titular de la asignatura la evaluación continua y final de los períodos faltantes en cada alumno en particular.

De todo se aprende, todo tiene un significado y este lapso por el que está atravesando la humanidad, no es la excepción. El confinamiento por la pandemia del COVID 19 nos ha llevado a la reflexión de la importancia de cuidarnos los unos a los otros y de valorar lo que con esfuerzo se adquiere. Pero sobre todo de valorarnos como persona, como seres emocionales necesarios de bienestar para alcanzar nuestros anhelos.

Éxito y prosperidad.



Justificación

Derivado de la publicación de los Acuerdos publicados en el Diario Oficial de la Federación, a través de los cuales se estableció la suspensión de clases de las escuelas dependientes de la Secretaría de Educación Pública, como medida preventiva para disminuir el impacto de emergencia sanitaria generada por el virus SARS-CoV2 (COVID-19) y propagación en el territorio nacional.

Ante la contingencia de salud debida al COVID-19, todos y todas permanezcamos en casa para evitar la expansión del contagio, se solicitó a los docentes definir estrategias y objetos de aprendizaje a utilizar para seguir conduciendo a sus estudiantes en la construcción de aprendizajes y/o productos esperados.

La elaboración de los manuales de Geometría y Trigonometría, Cálculo Diferencial y Probabilidad y Estadística, asignaturas que se imparten en este semestre en el Bachillerato, contienen los aprendizajes mínimos necesarios para que las y los estudiantes recuperen esos saberes indispensables, con la capacidad de regulación de su propia comprensión, y por consecuencia, el desarrollo de las competencias matemáticas, cuya utilidad se verá reflejada, no sólo en el contexto académico, sino en cualquier ámbito de su vida cotidiana.





Bloque 1 | Manejo de la información

1.1 Población, muestra y tipos de variables.



Introducción



La mayoría de las ciencias avanza y crea marcos teóricos, comprobando con la observación directa de todo lo conocido. Un ejemplo es el de las aves, hasta hace unos cientos de años los biólogos tenían a un conjunto de animales que tenían pico, todos ellos eran aves, ya sabes; con plumas, dos patas, forma conocida, etc. En base a ellas se crearon libros, categorías, cursos completos. Cuando se conoció para el mundo Europeo – Americano al ornitorrinco, la mayoría de las teorías al respecto se vinieron abajo.

Con lo anterior queremos establecer que, para hacer una afirmación científica absoluta, deberíamos conocer a TODOS los elementos que vamos a estudiar, esto es en ocasiones imposible, de ahí que se han desarrollado técnicas para el análisis de una parte de los elementos a estudiar



Actividades de Apertura

Reflexiona lo siguiente: Si quisiéramos saber el número de habitantes de un estado o municipio, tardaríamos varias semanas en contar a todos y cada uno de ellos, cuando finalmente terminamos, ya nacieron o fallecieron algunos de sus habitantes.

Es por ello que se hacen estudios de una porción de los habitantes y luego se generaliza. Esto también es aplicable a la industria en general.



Actividades de Desarrollo



La **Población o Universo** es todo conjunto de personas, cosas, objetos, etc., con ciertas características comunes que puede ser finita o infinita.

La **Muestra** es toda porción de elementos tomada de una población, entre más grande sea la muestra, será más representativa de la población.

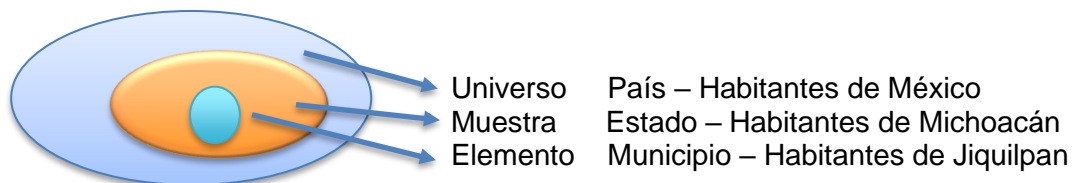
El **Muestreo** es el procedimiento por el cual se recopila información de los elementos de una muestra, existen varias formas de realizar el muestreo, unas son más sencillas que otras, otras más económicas y otras más representativas.



Ejemplo 1



Se desea estudiar las características económicas de un estado de la República Mexicana. Escribe tu propuesta de un ejemplo de Universo, Muestra y elemento.



Ejemplo 2: Se desea estudiar las Socio económicas de los alumnos del CBTis 12 de Jiquilpan, Mich. Para facilitar el estudio, se decide tomar como muestra a un grupo al azar. Escribe tu propuesta de un ejemplo de Universo, Muestra y elemento.

Universo:	Alumnos del CBTis 12
Muestra:	Alumnos de 5° "A" de Laboratorista.
Elemento:	Joaquín Díaz Juárez de San Diego Quitupán.

EJERCICIO 1: Escribe 2 ejemplos que contengan universo, población y muestra. Pueden ser de artículos de tu agrado como: celulares, motos, consolas de juegos, etc.

	Ejemplo 1	Ejemplo 2
Universo		
Muestra		
Elemento		

Una **Variable** se puede representar con un símbolo tal como x , y , a , b , que puede tomar un valor cualquiera. Si esta variable solamente toma un valor, se le llama **Constante**.

Alumno	Promedio
Francisco	9.2
Felipe	8.7
Raúl	9.5
Jaime	8.0

} Variable

En este caso el promedio es la variable.



Variabes Nominales son las más simples y abundantes, su única función es la de clasificar en categorías y su orden es indistinto. NO tiene sentido realizar operaciones aritméticas con ellas.

Ejemplo



	Estado Civil				
Variable →	Soltero	Casado	Divorciado	Viudo	Unión libre
Categoría →	1	2	3	4	5

Aquí los números carecen de propiedades solo sirven para distinguir un estado civil de otro, no significa que un estado civil sea mejor o mayor que otro.

Variabes Ordinales clasifican las observaciones en categorías que exigen ordenación, su variable operacional es una escala ordinal de mayor a menor.

Ejemplo



	Grado de Alcoholismo			
Variable →	Abstemio	Ocasional	Regular	Constante
Escala de medición →	1	2	3	4

NO tiene sentido realizar operaciones aritméticas con ellas.

Variabes Continuas Son las que pueden tomar cualquier valor fijo dentro de un intervalo, siempre entre dos valores observables, va a existir un tercer valor intermedio, que también podría tomar la variable continua.

Ejemplo



Variable →	Estatura (escuela primaria)						
Escala de medición →	1.10m	1.2m	1.21m	1.215m	1.35m	1.352m	1.40m

Una variable continua toma valores a lo largo de un continuo, esto es, en todo un intervalo de valores. Un atributo esencial de una variable continua es que, a diferencia de una variable discreta, nunca puede ser medida con exactitud; el valor observado depende en gran medida de la precisión de los instrumentos de medición. Con una variable continua hay inevitablemente un error de medida.

Variabes Discretas son las que toman solo algunos valores dentro de un intervalo, por ejemplo, valores enteros. Al indicar el número de hijos que tiene una familia, el número de recámaras de una casa, el número de mascotas, etc.

Ejemplo



Variable →	Número de hijos por familia						
Escala de medición →	1	2	3	4	5	6	7 o más



Actividades de Cierre



Reflexiona cuando en alguna ocasión te ha tocado llenar un formulario, ya sea de inscripción, de apertura de una cuenta, una solicitud, etc. ¿Cuál tipo de variable te recordó al ver las anteriores?

Llena un ejemplo de ese tipo de variable que recuerdas y que sea distinto a los ejemplos ya vistos.

Ejemplo de una variable _____

Variable →							
Escala de medición →							

1.2 Tablas estadísticas.



Introducción

Efectuada la toma de datos (recolección), hay que contar y clasificarlos (ordenación) de manera clara y significativa para su fácil manejo, para ello se recurre a la tabla estadística y su gráfico, de estos dos, la tabla es más importante, pues es la base de la construcción del gráfico y de su análisis; la tabla estadística consta de 3 partes: la cabeza, el cuerpo y el pie.



Actividades de Apertura

Imagina que estás leyendo un artículo de tipo científico, donde vienen múltiples datos, estos pueden abarcar varias hojas y es difícil de encontrar la información deseada. Ahora imagina que en lugar de este texto puedes ver una tabla con los datos esenciales. ¿Cuál preferirías analizar?



Actividades de Desarrollo

A continuación, se muestran dos formas de mostrar la misma información.

Ejemplo 1 (Texto)

El anuario estadístico de 1984 del Tecnológico de Jiquilpan nos dice que hasta 1983 había 137 egresados, de los cuales de los cuales 80 fueron hombres y 57 mujeres repartidos como sigue: 1° generación feb 81 17 hombres y 11 mujeres, 2° generación ago. 81 23 y 15, 3° feb 82 11 y 10, 4° ago. 82 5 y 1 y la 5° feb 83 por 24 y 13. Presenta esta información por generación en una tabla estadística.



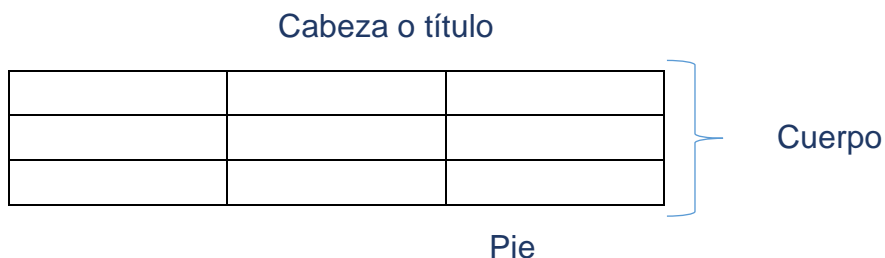
Ejemplo 1 (Tabla estadística)

Egresados del Tecnológico de Jiquilpan. México 1984

Generación	Fecha	Hombres	Mujeres	Total
1°	Feb 81	17	11	28
2°	Ago 81	23	15	38
3°	Feb 82	11	10	21
4°	Ago 82	5	1	6
5°	Feb 83	24	13	44

Fuente: Anuario estadístico 1984, Tecnológico de Jiquilpan

Los elementos para tener una tabla estadística **COMPLETA** son:



La **Cabeza o Título** de la tabla ocupa la parte superior de la misma y contiene el **Título**, el cual expresa claramente el contenido o significación de la información, el **Período** es el espacio del tiempo para el cual es válida la información y la **Unidad de Medida**, siempre y cuando sea común a toda la información.

El **Cuerpo** está localizado en la parte central de la tabla y en él, se encuentra la esencia de la información, o sea, las **categorías** de las variables y sus frecuencias o intensidades. Por lo general, las categorías se colocan del lado izquierdo y las **frecuencias** del lado derecho, pero puede ser al revés dependiendo de la información.

El **Pie** se localiza en la parte inferior de la tabla, está destinado a las notas y aclaraciones indicadas en el título o en el cuerpo cuando son necesarias, además menciona **la fuente u origen de la información**, podría no haber aclaraciones en un cuadro, pero la fuente si debe aparecer.



Ejemplo 2: Miguel Flores desea abrir una boutique de ropa para alumnas del CBTis No. 12, el número total de mujeres es de 643, de las cuales, 240 prefieren vestir con falda, 180 con vestido, 72 con short y 151 con pants, esta información proviene del bufete de asesores mercadológicos Guiznar S. A. de C. V. año 2016. Presenta esta información en una tabla ordenada de mayor a menor y con sus porcentajes, incluye un encabezado y pie de página.



Razonamiento.

Para calcular el porcentaje de cada prenda, debemos obtener: La suma de las prendas consideradas, es decir 643.

Para calcular el porcentaje de las faldas, vestidos, pants y shorts se hacen las siguientes operaciones:

$$\% \text{ faldas} = \frac{240 * 100}{643} = 37.33\%$$

$$\% \text{ vestidos} = \frac{180 * 100}{643} = 27.99\%$$

$$\% \text{ pants} = \frac{151 * 100}{643} = 23.48\%$$

$$\% \text{ shorts} = \frac{72 * 100}{643} = 11.20\%$$

BOUTIQUE ESTUDIANTIL, 2016

Clase	Cantidad	%
Falda	240	37.33
Vestido	180	27.99
Pants	151	23.48
Short	72	11.20
Total	643	100

Fuente: Bufete de asesores mercadológicas Guiznar S. A. de C V. año 2016.



EJERCICIO 1: En la enciclopedia de México 3° Ed 1978 p 991, leemos que el número total de viviendas del país es de 8´826,369, de las cuales 2´494,950 tiene muros de adobe, 3´658,146 de ladrillo y 2´133,273 de madera u otros materiales. Esta información proviene del IX Censo General de Población de 1970. Presenta esta información en una tabla de mayor a menor y con sus porcentajes e incluye un encabezado y pie de página.



Tipo	Cantidad	%
Ladrillo		
Adobe		
Madera, otros		
Total		

Fuente: : _____



Actividades de Cierre

La capacidad de abstracción es muy importante, cuando realizamos lecturas de comprensión de algún texto que incluya datos diversos, podemos apoyarnos de una tabla estadística para visualizar más fácilmente la información relevante.

Debido a la legislación en nuestro país, es obligatorio presentar tablas similares a la anterior en productos como: Alimentos, bebidas azucaradas, aparatos electrodomésticos, etc. Si sabemos analizar esta información, podremos tomar mejores decisiones de compra.

La siguiente vez que vayas de compras, analiza estas etiquetas y compara.



1.3 Distribución de frecuencias.



Introducción



Cuando se dispone de un gran número de datos, es útil concentrarlos de alguna forma, con ello se puede hacer la información más fácil de analizar y utilizar el distribuirlos en clases o categorías y determinar el número de individuos pertenecientes a cada categoría que será la frecuencia de clase.



Actividades de Apertura

Imagina que estuvieras a cargo de una zapatería y te encargan que hagas un pedido de calzado. ¿Cuántos pares de cada número ordenarías?, ¿Comprarías de todos los colores las mismas cantidades?, ¿Ordenarías las mismas cantidades de calzado para hombres que para mujeres?

El contar con algún tipo de información sobre las características del calzado que se ha vendido en el último año sería de mucha utilidad, pero, esta información debería estar agrupada de alguna forma para evitar una lista interminable.



Actividades de Desarrollo

Ejemplo 1: Con base en la siguiente información, agrupa de forma descendente la cantidad de goles por país: Neymar (Br) 2, Cristiano Ronaldo (Pr) 3, Javier Hernández (Mx) 2, Lionel Messi (Ar) 4, Andrés Guardado (Mx) 3, Gonzalo Higuain (Ar) 1, Giovanni Do Santos (Mx) 1, Rafa Márquez (Mx) 4, Diego Armando Maradona (Ar) 2, Ángel Di María (Ar) 1, Renato Sánchez (Pr) 2, Pepe (Pr) 2, Kaká (Br) 1.

Para “concentrar” los goles anotados por jugadores de cada nacionalidad, debemos sumar los goles de cada jugador de ese país.

Goles por equipo



Clase o frecuencia	}	País	Goles	}	categoría
		México	10		
		Argentina	8		
		Portugal	7		
		Brasil	3		

A esta misma tabla le podemos anexar más datos frecuenciales, tal como:

Frecuencia Acumulada (fa) es la suma de las frecuencias hasta este renglón, es decir que en el primer renglón se llevan 10 goles, para el siguiente renglón, se suman otros ocho goles para tener 18, más siete goles y escribimos 25, hasta llegar al último renglón, la última cantidad debe coincidir con la suma de la columna de frecuencia o goles en nuestro ejemplo.

Frecuencia Relativa (fr), esta es el porcentaje de las frecuencias (goles), para calcularla usaremos la siguiente fórmula:

$$fr(\%) = \frac{f}{\sum f} \times 100$$

Frecuencia Relativa Acumulada (fra), para calcularla tengo dos opciones: es la sumatoria acumulada de la columna de la **Frecuencia Relativa (fr)** o **calculando con la fórmula**.

$$fra(\%) = \frac{fa}{\sum f} \times 100$$

Usando los procedimientos anteriores se tiene las siguientes operaciones en la tabla:

País	Goles	fa	fr	Fra
México	10	10	$10 \cdot 100 / 28 = 35.7 \%$	35.7 %
Argentina	8	$10 + 8 = 18$	$8 \cdot 100 / 28 = 28.6 \%$	$35.7 + 28.6 = 64.3 \%$
Portugal	7	$18 + 7 = 25$	$7 \cdot 100 / 28 = 25.0 \%$	$64.3 + 25 = 89.3 \%$
Brasil	3	$25 + 3 = 28$	$3 \cdot 100 / 28 = 10.7 \%$	$89.3 + 10.7 = 100 \%$
Sumatoria	28		100 %	

El producto final queda así:

Goles por equipo

País	Goles	fa	fr	Fra
México	10	10	35.7 %	35.7 %
Argentina	8	18	28.6 %	64.3 %
Portugal	7	25	25.0 %	89.3 %
Brasil	3	28	10.7 %	100 %
Sumatoria	28		100 %	



Ahora es tu turno de poner en práctica lo aprendido.



EJERCICIO 1: Un agente de tránsito registró durante un mes el número de accidentes en motocicletas ocurridos en la avenida principal de Sahuayo, Michoacán. Los datos registrados son los siguientes:

1, 2, 4, 1, 2, 0, 0, 2, 6, 6, 4, 5, 1, 5, 1, 1, 1, 5, 6, 5, 1, 4, 3, 4, 4, 4, 2, 3, 2, 2.

Con la información anterior, elabora una tabla estadística en la que incluyas la variable ordenada de mayor a menor, sin repetir los valores, determina la frecuencia, la frecuencia acumulada, la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada.

No. de accidentes	f	fa	fr (%)	fra (%)
6				
5				
4				
3				
2				
1				
0				



Actividades de Cierre

Retomando el ejemplo de realizar un pedido de calzado y analizando los registros de compras podríamos conocer la siguiente información:

Los números de calzado que más se venden: Hombres y Mujeres.

La venta de calzado para dama supera por mucho a la de hombres.

La época del año influye en el tipo de calzado que se vende.

Los hombres por lo general compran colores y estilos más neutros y conservadores.



Ejercicios Adicionales



EJERCICIO 1: Un centro de salud en la sierra de Oaxaca realizó un estudio sobre el número de hijos que tienen 48 familias que habitan en una comunidad indígena. Presentó los siguientes datos:

6, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 4, 2, 1, 4, 5, 4, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 4, 0, 3, 2, 4, 3, 4, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 3, 4, 2, 4, 0, 3, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 2, 3, 5, 3.

Sin repetir los valores, determina la frecuencia, la frecuencia acumulada, la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada, para ello, elabora una tabla estadística en la que incluyas la variable ordenada ascendente (de menor a mayor)

No. de hijos	f	fa	fr (%)	fra (%)
0				
1				



EJERCICIO 2: Durante el mes de julio, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas:

32, 31, 28, 29, 33, 32, 31, 30, 31, 31, 27, 28, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 30, 30, 31, 30, 31, 34, 33, 33, 29, 29.

Con la información anterior elabora una tabla estadística en la incluyas la variable ordenada de forma ascendente, sin repetir los valores, determina la frecuencia, la frecuencia acumulada, la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada.

Temperatura	f	fa	fr	fra



1.4 Terminología de los datos agrupados.



Introducción



Cuando se a crear una tabla de frecuencias que contenga muchos datos, es difícil de elaborar y aún más de analizar, por ello, se recomienda agrupar en “paquetes los datos”, es usual que el número de “paquetes de datos sea entre 5 y 10, aunque esto dependa de las necesidades de cada caso o lo que se nos solicite.



Actividades de Apertura

Una inquietud entre los jóvenes es su aspecto físico, una de estas características sin duda es la estatura, esta varía de región en región del país, de la edad, la herencia, la alimentación, etc.

Imagina que tu maestro te solicitara que hicieras un análisis y tabla de las estaturas de tus compañeros. ¡Tendrías que crear una tabla quizás desde 1.50 hasta 1.90!

Esto sería más fácil si agrupas datos



Actividades de Desarrollo

El **Intervalo de Clase** es un texto o símbolo que define a una clase, los Límites de Clase son los números extremos que aparecen en ese símbolo, el número menor será **límite inferior** de clase y el mayor el **límite superior**, pero también existe el **Intervalo de Clase Abierto** donde no puede haber un límite inferior o superior definido, el **Tamaño o la Anchura de Clase** es la distancia entre el límite inferior al superior.

Ejemplo 1.- Analiza la tabla siguiente y los conceptos aplicados a los datos.

Edad de los alumnos del CBTIS 12, 2006

Edad (años)	Cantidad
14 - 15	480
16 - 17	370
18 - 19	150
20 o mas	20

- Intervalo de clase 14 – 15
- Límites 14 inferior 15 superior.
- Intervalo de clase abierto 20 o más
- Tamaño o ancho de clase $15 - 14 = 1$



Ejemplo 2: Los datos siguientes fueron indagados por un economista en 36 tiendas de una ciudad y representan los precios en pesos de planchas eléctricas, construye una tabla con 6 intervalos y con su fa, fr y fra.

60 75 82 77 65 70 67 65 78 73 69 66 72 66 68 74 61 66 74 79 67 74 80 75
70 66 76 78 79 75 72 79 69 70 74 72

Solución:

a) Ordenar datos. Se recomienda ordenar los datos, de preferencia en orden ascendente. Cuando varios datos se repiten, se puede colocar un guion y el número de datos iguales.

60 – 1, 61 – 1, 65 – 2, 66 – 4, 67 – 2, 68 – 1, 69 – 2, 70 – 3, 72 – 3
73 – 1, 74 – 4, 75 – 3, 76 – 1, 77 – 1, 78 – 2, 79 – 3, 80 – 1, 82 – 1

b) Calcular el recorrido o rango de datos a incluir en la tabla, para esto se hace la resta del valor máximo menos el mínimo.

$$\text{Recorrido} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$$

$$\text{Recorrido} = 82 - 60 = 22$$

c) Calcular los datos potenciales y la amplitud, esto nos permitirá conocer el número de valores que se incluirán en cada intervalo.

$$\text{Datos Potenciales} = \text{Recorrido} + 1$$

$$\text{Datos Potenciales} = 22 + 1 = 23$$

$$\text{Amplitud} = \text{Datos potenciales} / \text{núm. de intervalos}$$

$$\text{Amplitud} = 23 / 6 = 3.83 \text{ se sube al siguiente entero } 4$$

d) Cálculo de los intervalos. Iniciamos con el valor menor e incluiremos el número de valores que nos indica la amplitud, es decir:

Descripción	Valores que incluirá	Nomenclatura
Valor mínimo e incluir 4 números	60,61,62,63	60 - 63
Valor siguiente al anterior e incluir 4 números	64,65,66,67	64 - 67
También se puede sumarle la amplitud MENOS UNO $68+3=71$		68-71
Valor siguiente, valor sig. + 3	$72 - (72+3)$	72 - 75
Valor siguiente, valor sig. + 3	$76 - (76+3)$	76 - 79
Valor siguiente, valor sig. + 3	$80 - (80+3)$	80 - 83
Nota: El número de renglones debe ser igual a los intervalos solicitados y el último valor debe ser igual o mayor al máximo.		



Con lo anterior ya contamos con la primera columna, la segunda columna se obtiene de ir contando los elementos que hay entre los valores de cada incremento. Ilustraremos los dos primeros renglones:

Costo	Incluye los datos	Nº de tiendas
60 – 63	60 – 1, 61 – 1	1+1 = 2
64 – 67	65 – 2, 66 – 4, 67 – 2	2+4+2 = 8

Costo de planchas eléctricas (pesos)

Costo	Nº de tiendas	fa	fr%	fra%
60 – 63	2	2	5.56%	5.56%
64 – 67	8	10	22.22%	27.78%
68 – 71	6	16	16.67%	44.44%
72 – 75	11	27	30.56%	75.00%
76 – 79	7	34	19.44%	94.44%
80 – 83	2	36	5.56%	100.00%
Suma	36		100.01%	
Nota: Puede haber un error de una unidad en el 100% por redondeo				



EJERCICIO 1: Se presentan los litros de leche vendida diariamente por un pequeño comerciante durante un bimestre (junio – julio 05), con ellos construye una distribución agrupada (tabla) con 9 intervalos de clase y sus frecuencias.

29, 30, 26, 32, 44, 37, 27, 40, 40, 51, 57, 28, 46, 35, 26, 37, 42, 59, 61, 60, 34, 27, 52, 44, 46, 54, 35, 36, 41, 31, 45, 54, 33, 35, 37, 39, 42, 59, 60, 37, 36, 55, 39, 31, 36, 43, 49, 29, 38, 40, 28, 52, 35, 49, 32, 38, 43, 54, 59, 37

Paso 1. Ordenar por frecuencias

Paso 2. Se determina el recorrido de la variable

$$\text{Recorrido} = \underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Paso 3. Calcular los datos potenciales y la amplitud.

$$\text{Datos Potenciales} = \underline{\quad} + 1 = \underline{\quad}$$

$$\text{Amplitud} = \underline{\quad} / \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



Amplitud = _____ se sube al siguiente entero _____

Paso 4. Se construye la tabla siguiente.

Litros de leche vendidos jun – jul 05

Litros	No. de veces fr	fa	fr %	fra %
Suma				



Actividades de Cierre



El agrupar datos nos permite poder apreciar y analizar una gran cantidad de información al mismo tiempo, hasta ahora has visto cómo hacer estos procesos a mano y apoyado con la calculadora, pero también conoces herramientas como la hoja de cálculo (Excel), que te permitiría hacer esto en una fracción del tiempo. Es importante que vayas relacionando lo aprendido en cada área del conocimiento con lo que ya conoces.

¡Date la oportunidad de ejercitar tus habilidades digitales!



Ejercicios Adicionales



EJERCICIO 2: La antigüedad en años de trabajo de un conjunto de docentes es la siguiente, según el departamento de Recursos Humanos del CBTIS 12 en 2006.

7 6 10 7 12 11 14 10 14 12 9 6 8 13 3 10 3 10 12 5 14 10 7 5 4

Con estos datos construye una tabla estadística con 4 intervalos y que contenga su fa, fr y fra.

Paso 1) Ordenar por frecuencias

Paso 2) Se determina el recorrido de la variable

$$\text{Recorrido} = \underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Paso 3) Calcular los datos potenciales y la amplitud.

$$\text{Datos Potenciales} = \underline{\quad} + 1 = \underline{\quad}$$

$$\text{Amplitud} = \underline{\quad} / \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\text{Amplitud} = \underline{\quad} \text{ se sube al siguiente entero } \underline{\quad}$$

Paso 4) Se construye la tabla siguiente.



Antigüedad de los docentes CBTIS 12 2006

Años	Cantidad	fr %	fa	fra %

1.5 Gráficos estadísticos.



Introducción

Uno de los objetivos de la estadística es comunicar los resultados de una investigación de manera clara y concisa, las representaciones graficas de esos resultados obedecen a esta intención



Actividades de Apertura



Una forma de comunicar una gran cantidad de temas es usar las gráficas, las vemos a diario para decirnos si va subiendo o bajando el dólar, la gasolina, los contagios por CoVid 19, los índices de obesidad, desempleo, entre otros.

En los medios de comunicación se usan con mayor frecuencia las gráficas que las tablas estadísticas, ya que la mayoría de la población no comprende las tablas y mucho menos lee un texto o artículo que trate de temas que incluya información estadística de utilidad.

¿Sabes cuál es uno de los países con mayor índice de pobreza entre los miembros de OCDE? Otra pista es uno de los primeros lugares en consumo de refresco, otra pista sus habitantes ocupan uno de los primeros lugares en obesidad. Toda esta información casi siempre se muestra en gráficas estadísticas.



Actividades de Desarrollo

Una vez concentrados los datos en una tabla, se puede hacer la representación gráfica correspondiente. Un Grafico Estadístico es la representación de los datos estadísticos por medio de figuras geométricas (puntos, líneas, rectángulos, etc.) cuyas dimensiones son proporcionales al valor numérico de los datos.

El grafico es útil para dar una rápida idea de la situación general que se está analizando, permite determinar con un simple vistazo máximos, mínimos, variaciones del fenómeno y determinar soluciones.



a) Gráfico de Barras.

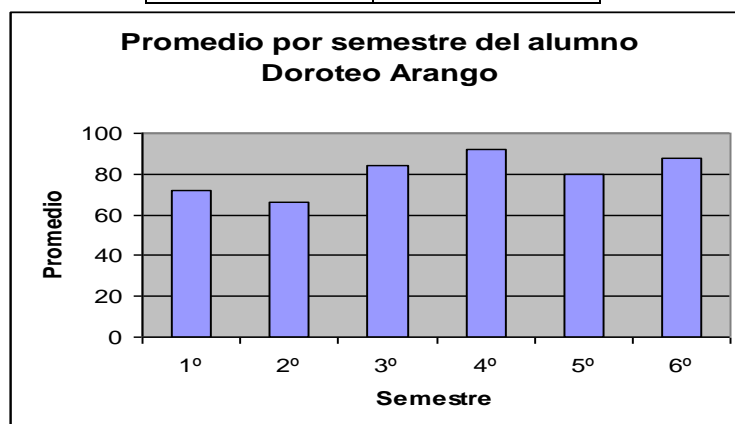
La construcción de este gráfico se basa en la representación de un valor numérico por un rectángulo. Las barras son usualmente verticales, pero también pueden ser horizontales.



Ejemplo 1.- De la tabla siguiente construye un gráfico de barras

Promedio por semestre del alumno Doroteo Arango

Semestre	Promedio
1	72
2	66
3	84
4	92
5	80
6	88



b) Gráfico Circular, de sectores o Pastel

Es una forma alternativa del gráfico de barras, en su construcción se utiliza una circunferencia dividida en sectores angulares proporcional al valor de la variable. Es conveniente usar las fra para facilitar su trazo





Ejemplo 1. De la tabla anterior construye un gráfico circular con los promedios.

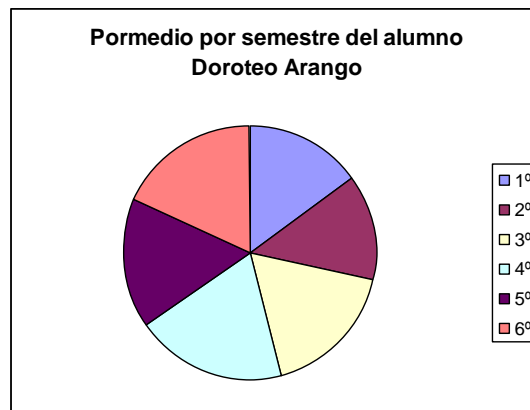
Procedimiento: Utilizaremos como opción el uso de la regla de 3 (razones y proporciones).

$$\frac{360^\circ}{x} = \frac{482}{72} \rightarrow x = 53.77^\circ \cong 54^\circ \quad (\text{Se requiere transportador para trazar})$$

De igual forma podremos calcular los ángulos para los siguientes promedios.

$$66 - 49^\circ \quad 84 - 63^\circ \quad 92 - 69^\circ \quad 80 - 60^\circ \quad 88 - 65^\circ$$

Otra opción es utilizar las frecuencias relativas acumuladas y utilizar el 100% como toda la circunferencia.



Nota: Si contamos con una hoja electrónica de cálculo (Excel), el programa nos puede hacer cualquier gráfica, pero debemos saber hacerla usando instrumentos de dibujo.

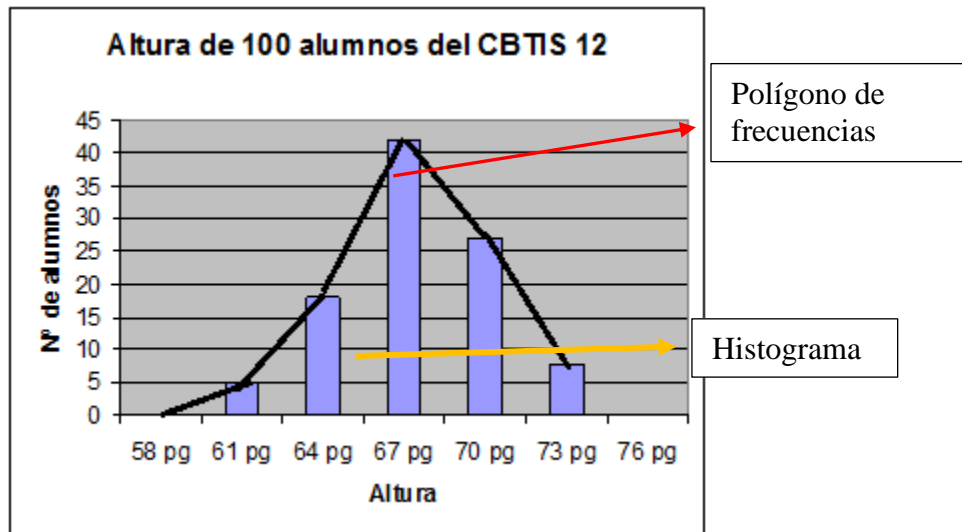
- c) **Histograma.** Este es muy similar a gráfico de barras, solo que, con ciertas características, los centros de las barras sobre el eje "x" son las marcas de clase, además de prolongar estas marcas a línea inferior y superior. **El polígono de frecuencias** es la unión por medio de una línea de todas las frecuencias.

Ejemplo 2. De la tabla siguiente construye los gráficos antes mencionados.

Altura de 100 estudiantes del CBTIS 12

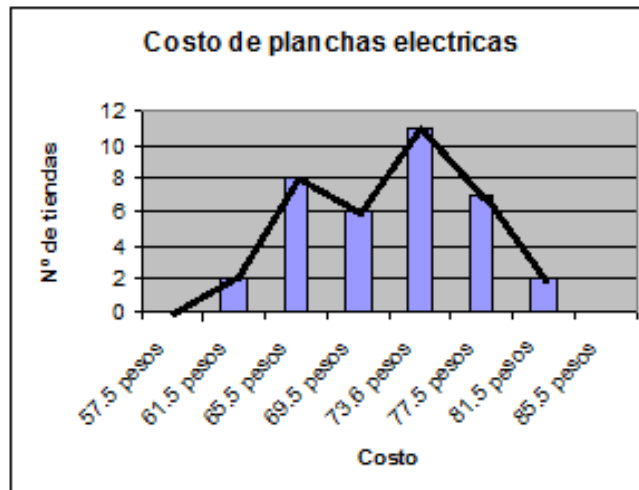
Altura (pulg)	Cantidad
60 – 62	5
63 – 65	18
66 – 68	42
69 – 71	27
72 – 74	8

Primeramente, se determinan las **marcas de clase** $60 + 62 / 2 = 61$, 64 , 67 , 70 , 73 , también se determina la inferior y superior, que son 58 y 76



Ejemplo 3. De la tabla del ejemplo sobre planchas eléctricas (Ejemplo 2 del tema anterior), elabora su histograma con su polígono de frecuencia.

Marca de clase = $60 + 63 / 2 = 61.5, 65.5, 69.5, 73.5, 77.5, 81.5, 82, \text{inf } 57.5, \text{sup } 85.5$

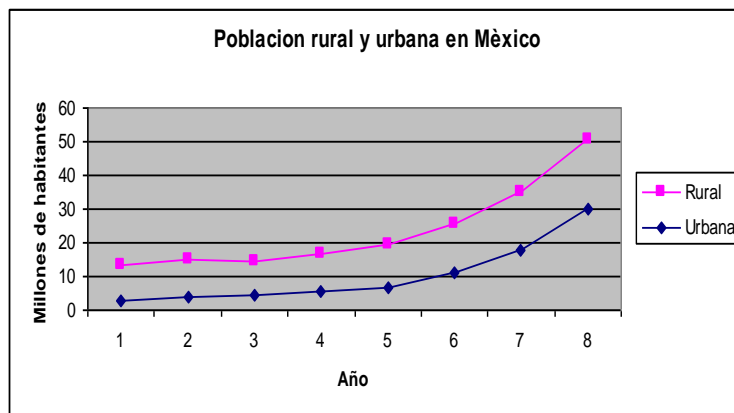




- d) **Gráfico de líneas.** Es muy útil para comparar los datos de distribuciones, esta consiste en unir por medio de segmentos de líneas las puntas que indican la frecuencia. Presenta la siguiente tabla por medio de un gráfico de líneas.

Población rural y urbana México 1900 – 1980 (millones)

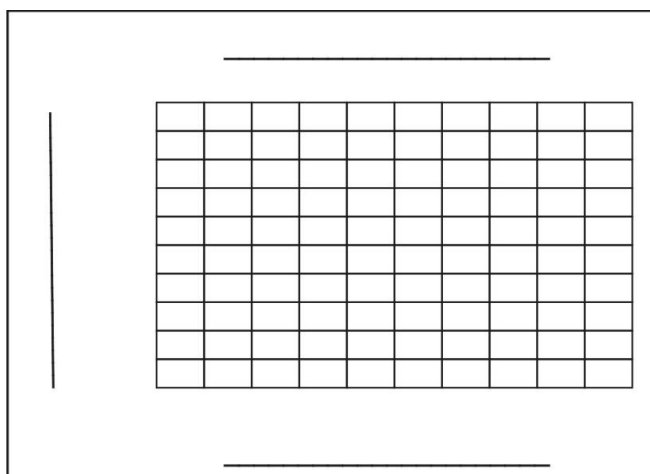
Año	Urbana	Rural
1900	2.6	11.0
1910	3.7	11.5
1921	4.5	9.9
1930	5.5	11.0
1940	6.9	12.8
1950	11.0	14.8
1960	17.7	17.2
1970	29.8	20.9
1980	44.6	23.3



EJERCICIO 1: La antigüedad en años de trabajo de un conjunto de docentes es la siguiente, según el departamento de Recursos Humanos del CBTIS 12 en 2006.

Se muestra en la siguiente tabla, con ellos traza una gráfica de barras verticales.

Años	Cantidad	fr %	fa	fra %
3 – 5	5	20	5	20
6 – 8	6	24	11	44
9 – 11	7	28	18	72
12 – 14	7	28	25	100



- e) **Pictograma.**

Es uno de los gráficos que atrae más la atención, consiste en representar por medio de figuras las magnitudes. Su desventaja principal es que no permite hacer comparaciones satisfactorias.

Se puede hacer fácilmente usando hojas electrónicas de cálculo (Excel)





Actividades de Cierre



Como te pudiste dar cuenta, el trazo de una gráfica usando tu juego de geometría, puede ser una actividad muy bonita, pero laboriosa.

Las gráficas pueden imprimirles calidad y profesionalismo a tus trabajos, de igual forma, pueden ayudarte a argumentar tu postura en una exposición.

Nuevamente, te invitamos a que apliques las herramientas como la hoja de cálculo (Excel), que te permitiría hacer esto en una fracción del tiempo. Es importante que vayas relacionando lo aprendido en cada área del conocimiento con lo que ya conoces.

¡Date la oportunidad de ejercitar tus habilidades digitales!

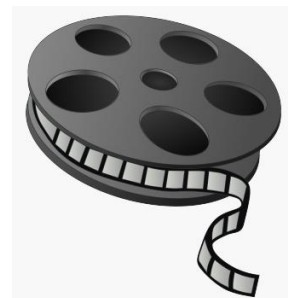


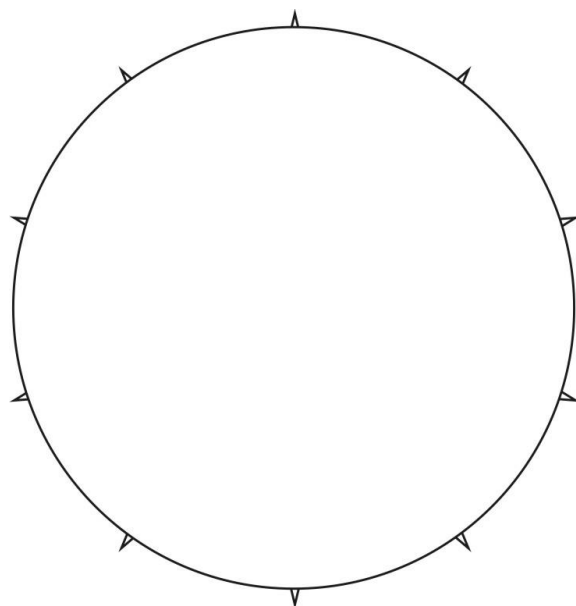
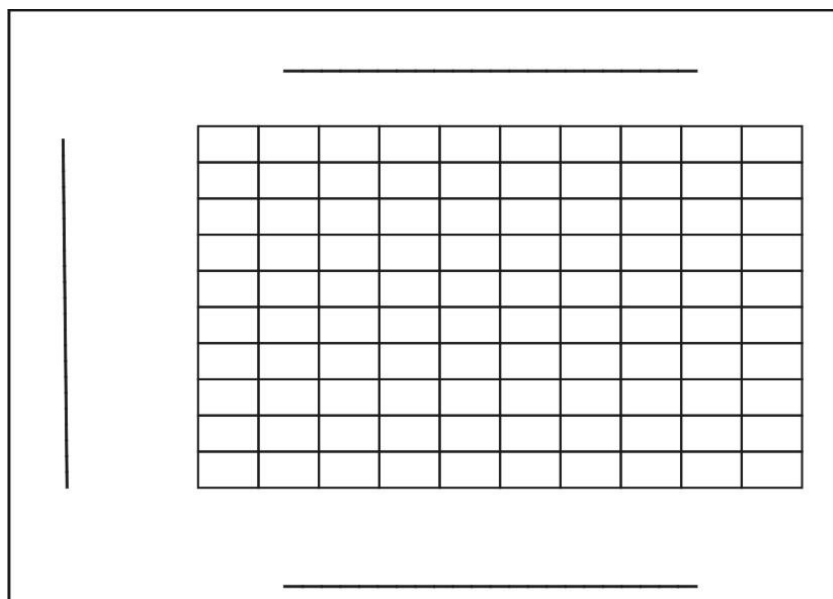
Ejercicios Adicionales

EJERCICIO 2: Con la siguiente información contenida en la tabla estadística, construye una gráfica de barras verticales y una circular (se recomienda usar el fra)

Las películas exhibidas en el DF según su nacionalidad en 1988 sin contar las de EUA son: mexicanas 705, alemanas 75, francesas 176, inglesas 71, italianas 142, otras 399, fuente Anuario Estadístico 1990.

Nacionalidad	Películas	fr %	fa	fra %
Mexicana	705	44.96%	705	44.96%
Alemana	75	4.78%	780	49.74%
Francesa	176	11.22%	956	60.97%
Inglesa	71	4.53%	1027	65.50%
Italiana	142	9.06%	1169	74.55%
Otras	399	25.45%	1568	100.00%







Bloque 2 | Medidas de tendencia central

2.1 Media



Introducción

La tendencia central se refiere al punto medio de una distribución. Las medidas de tendencia central se conocen también como medidas de posición. Las tres medidas de tendencia central o de centralización más importantes son la Media Aritmética o media, Mediana y Moda.

Media



Un valor que es simbólico y representativo de un conjunto de datos se denomina promedio. Se hace notar que en un conjunto de datos ordenados de acuerdo con su magnitud, el promedio siempre tiende a situarse en el centro de dicho conjunto, razón por la cual los promedios se denominan también medidas de centralización o de tendencia central.

2.1.1. Media aritmética

Es el promedio más utilizado y por lo general se denomina media. La media aritmética o media de un conjunto de elementos se define como la suma de los valores de estos elementos dividido entre el número total de ellos. Se simboliza \bar{X} (léase \bar{X} barra), para **datos no agrupados**, matemáticamente se determina por la ecuación:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N}$$

Donde:

\bar{X} = Media aritmética o media.

X = Valor de cada elemento.

N = Número total de elementos.

Ejemplo:

Determina la media aritmética de los números 18, 13, 15, 22 y 20.

$$\bar{X} = \frac{18 + 13 + 15 + 22 + 20}{5} = \frac{88}{5} = 17.6$$



Media aritmética para datos agrupados.

Cuando los datos se presentan agrupados mediante una distribución de frecuencias, todos los valores caen dentro de los intervalos de clase dados que se consideran coincidentes con las marcas de clase o puntos medios de cada intervalo, es decir, las ponderaciones son las frecuencias y las marcas de clase o puntos medios son los valores que se ponderan.

En una distribución de frecuencias para datos agrupados, la media aritmética se determina al multiplicar las distintas marcas o puntos medios de clase por sus respectivas frecuencias de clase; se suman los productos y el resultado se divide entre el número total de frecuencias. Matemáticamente se representa:

$$\bar{X} = \frac{\sum f X}{N}$$

Donde:

\bar{X} = Media aritmética o media.

X = Marcas o puntos medios de clase.

f = Frecuencia total de clase.

N = Número total de frecuencias.

Ejemplo:

La siguiente tabla de distribución de frecuencias representan las edades de los 96 asistentes a un curso de informática.

Intervalos (edades)	Frecuencias (asistentes)	Marca de clase (X)	$f X$
24 - 28	26	8	208
29 - 33	31	17	527
34 - 38	36	29	1 044
39 - 43	11	23	943
44 - 48	46	15	690
49 - 53	51	4	204
		$N = 96$	$\sum f X = 3 616$

Al sustituir los datos anteriores en la ecuación para la media aritmética resulta:

$$\bar{X} = \frac{\sum f X}{N} = \frac{3 616}{96} = 37.666$$

La media aritmética de las edades es 37.666 años.



2.2 Mediana y Moda

2.2.1 Mediana



Se define como el **valor medio** a aquel que divide a un conjunto de datos que se ordena de acuerdo con su magnitud (de forma ascendente o de forma descendente) en dos partes iguales, es decir, es aquel valor central que deja por debajo igual número de elementos que por arriba de él.

Si el conjunto de elementos ordenados de acuerdo con su magnitud, es **impar**, la mediana será el valor intermedio de dicha sucesión. Si el conjunto de elementos ordenados de acuerdo con su magnitud es **par**, la mediana será la media aritmética de los dos elementos medios.

Ejemplos:

1. Determina la mediana de los números 25, 29, 24, 29, 27, 25, 29, 31, 26

Solución:

Al ordenar ascendentemente el conjunto de elementos numéricos dado tenemos:

$$24, 25, 25, 26, 27, 29, 29, 29, 31$$

Por definición, la mediana de los números es el valor central, en este caso es 27.

2. Determina la mediana de los números 49, 38, 46, 40, 36, 42, 36, 43

Solución:

Al ordenar descendientemente el conjunto de elementos numéricos dado se tiene:

$$49, 46, 43, 42, 40, 38, 36, 36$$

La mediana es la media aritmética de los números 42 y 40, es decir:

$$Mediana = \frac{42 + 40}{2} = 41$$

La mediana del conjunto de elementos numéricos dados es 41

Mediana para datos agrupados.

Para determinar la mediana en datos agrupados se emplea el método de la interpolación como es decir, se fundamenta de la suposición de que los elementos en la **clase mediana** (es la clase en la cual se localiza el valor de la mediana) están distribuidos uniformemente en todo el intervalo.



El cálculo de la mediana de una distribución de frecuencias se determina matemáticamente por la ecuación:

$$\text{Mediana} = LR_1 + \left[\frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f \text{ mediana}} \right] C$$

Donde:

LR_1 = Límite real inferior de la clase mediana, es decir, la clase que contiene el valor de la mediana.

N = Número total de datos, es decir, la frecuencia total.

$\sum f_1$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase mediana.

$f \text{ mediana}$ = Frecuencia de la clase mediana, la cual nunca debe ser mayor que $\frac{N}{2}$

C = El tamaño del intervalo de la clase mediana.

Ejemplo:

La siguiente tabla de distribución de frecuencias muestra las puntuaciones que obtuvieron durante el primer parcial 56 estudiantes en un examen de geometría analítica. Calcula la mediana.

Intervalos (puntuaciones)	Frecuencias (estudiantes)
45 - 51	1
52 - 58	3
59 - 65	7
66 - 72	12
73 - 79	15
80 - 86	9
87 - 93	6
94 - 100	3
	$N = 56$

Clase mediana → (punta a la fila 73-79) ← (punta a la frecuencia 15) $f \text{ mediana}$

Solución:

Se localiza la clase mediana: $\frac{N}{2} = \frac{56}{2} = 28$

La suma de las frecuencias de las cuatro y cinco primeras clases es $1 + 3 + 7 + 12 = 23$ y $1 + 3 + 7 + 12 + 15 = 38$, respectivamente, por lo que es evidente que la mediana se encuentra en la quinta clase, que será, por lo tanto, la clase mediana.

Entonces observamos los siguientes datos:

$$LR_1 = \frac{72 + 73}{2} = 72.5$$

$$N = 56$$

$$\sum f_1 = 23$$

$$f \text{ mediana} = 15$$

$$C = 7$$

Al sustituir los datos anteriores en la ecuación de la mediana, resulta:



$$Mediana = LR_1 + \left[\frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{mediana}} \right] C = 72.5 + \left[\frac{\frac{56}{2} - 23}{15} \right] (7)$$

$$Mediana = 72.5 + \left[\frac{28 - 23}{15} \right] (7) = 72.5 + \left(\frac{5}{15} \right) (7)$$

$$Mediana = 72.5 + 2.33 = 74.83 \approx 75$$

La media de las puntuaciones calculada a partir de datos agrupados es 75

2.2.2 Moda

Se define como el valor que se presenta con la **mayor frecuencia**, es decir, es el **valor más común** de un conjunto de elementos numéricos dado.

Entre las características de la moda destacan que ésta puede no existir, incluso si existe puede no ser única. Si un conjunto de valores dado presenta una sola moda se denomina **unimodal**. Sí presenta dos modas se denomina **bimodal**; si presentan más de dos modas se denomina **multimodal**.

Ejemplos 1: Dado el siguiente conjunto de números 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20; determina su moda.

Solución: Analizando el conjunto de números dados, se observa que todos ellos tienen igual frecuencia, por lo que se concluye que no presenta moda, es decir, no existe.

Ejemplos 2: Dado el siguiente conjunto de números 3, 3, 4, 6, 8, 8, 8, 11, 11, 13, 15; determina su moda.

Solución: Analizar el conjunto de números dado, se observa que el número que se presenta con mayor frecuencia es el 8, por lo que se concluye que el valor de la moda es 8 y el conjunto se denomina unimodal.

Ejemplos 3: Dado el siguiente conjunto de números 10, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 15, 15, 16, 17, 17, 17, 19; determina su moda.

Solución: Al analizar el conjunto de números dado, se observa que los números que se presentan con mayor frecuencia son el 12, 14 y 17, por lo que se concluye que los valores de la moda son 12, 14 y 17, en donde el conjunto se denomina multimodal.



Moda para datos agrupados.

Para determinar la moda en datos agrupados se emplea el método de la interpolación, es decir, se fundamenta en encontrar primero la clase modal (es la clase en la cual se localiza el valor de la moda) que se caracteriza por tener la máxima frecuencia de la distribución.

El siguiente paso es determinar la diferencia absoluta entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase **premodal** o anterior; así mismo, la diferencia absoluta entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase **posmodal** o siguiente. Lo anterior es con el fin de observar hacia dónde se concentra el valor modal.

El cálculo de la moda de una distribución de frecuencias se determina matemáticamente por la ecuación:

$$Moda = LR_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) C$$

Donde:

LR_1 = Límite real inferior de la clase modal, es decir, la clase que contiene el valor de la moda.

Δ_1 = Es la diferencia absoluta entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase premodal o anterior.

Δ_2 = Es la diferencia absoluta entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase posmodal o siguiente.

C = Tamaño del intervalo de clase modal

Ejemplo 1: La siguiente tabla de distribución de frecuencias agrupa los salarios semanales en miles de pesos de 130 empleados técnicos de la empresa TRW, división de cinturones de seguridad; determina la moda de dichos salarios.

Solución: Primero, se considera la tabla de distribución de frecuencias para localizar la clase modal que se caracteriza por tener la máxima frecuencia y el valor de la moda que resulta ser (750 – 773).

Intervalos (salarios)	Frecuencias (empleados)
654 - 677	3
678 - 701	7
702 - 725	13
726 - 749	19
750 - 773	26
774 - 797	21
798 - 821	17
822 - 845	12
846 - 869	8
870 - 893	4
	$N = 130$

Clase modal →

$\Delta_1 = 26 - 19 = 7$
 $\Delta_2 = 26 - 21 = 5$

También se observan los siguientes datos:



LR_1 = El límite real inferior de la clase modal se obtiene sumando el límite superior de un intervalo de clase y el límite inferior de intervalo de clase contiguo superior y dividido entre dos, es decir:

$$LR_1 = \frac{749 + 750}{2} = 749.5$$

$$LR_1 = 749.5$$

$$\Delta_1 = 26 - 19 = 7$$

$$\Delta_2 = 26 - 21 = 5$$

$$C = 23$$

Al sustituir los datos anteriores en la ecuación de la moda resulta:

$$Moda = LR_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) C = 749.5 + \left(\frac{7}{7 + 5} \right) (23)$$

$$Moda = 749.5 + 13.42 = 762.92$$

La moda de los salarios calculada a partir de datos agrupados es 762.92 miles de pesos.



Actividades de Apertura

La siguiente tabla de distribución de frecuencias muestra el número de horas a la semana que 60 familias miran programas televisivos; determina la media aritmética.

Intervalos (horas)	Frecuencias (familias)	Marca de clase X	f_x
30 - 39	4		
40 - 49	9		
50 - 59	13		
60 - 69	19		
70 - 79	12		
80 - 89	3		
	$N = 60$		

$$\bar{X} = \frac{\sum f X}{N} =$$



Actividades de Desarrollo

Con los datos de la tabla de distribución de frecuencias anterior, calcula:

- La mediana por fórmula
- La moda
- Construye el Histograma

Intervalos (horas)	Frecuencias (familias)
30 - 39	4
40 - 49	9
50 - 59	13
60 - 69	19
70 - 79	12
80 - 89	3
	$N = 60$



Actividades de Cierre

Instrucciones: Realiza la siguiente actividad en una hoja de cálculo Excel para determinar lo que se te solicita:

La siguiente tabla de Distribución de frecuencias registra el número de horas al mes que sienten 80 miembros de un club altruista dedican a labores sociales en su comunidad.

Determinar:

- La media aritmética
- La mediana
- La moda
- Construye el Histograma

Solución:

a) $\bar{X} =$ horas

b) $M_e =$ horas

c) $M_o =$ horas

Intervalos (horas)	Frecuencias (miembros)	Marca de clase	f X
	f	X	
10 - 14	6		
15 - 19	14		
20 - 24	23		
25 - 29	28		
30 - 34	19		
35 - 39	11		
40 - 44	7		
	108		$\sum f X =$



Ejercicios Adicionales

Como reforzamiento de los temas vistos, realiza los siguientes ejercicios:

1. La tabla de distribución de frecuencias registra la cantidad de adultos en una población a partir de los 30 años, arrojando los siguientes resultados:

INTERVALO	FRECUENCIA f	MARCA DE CLASE X	fX
30 - 39	7		
40 - 49	12		
50 - 59	19		
60 - 69	16		
70 - 79	10		
80 - 89	6		
90 - 99	2		
	$N = 72$		

Calcula los valores de:

- a) La media aritmética
 - b) La mediana
 - c) La moda
 - d) Construye el Histograma
2. En la siguiente tabla de distribución de frecuencias se muestran las estaturas de un grupo de 202 estudiantes. Calcule la media mediana, moda y construye el gráfico de histograma en una hoja de cálculo Excel.

INTERVALO (estaturas)	FRECUENCIA f	MARCA DE CLASE X	fX
152 - 156	25		
157 - 161	18		
162 - 166	36		
167 - 171	55		
172 - 176	53		
177 - 181	15		
	$N = 202$		

Soluciones:

- a) $\bar{X} =$ *de estatura*
- b) $M_e =$ *de estatura*
- c) $M_o =$ *de estatura*



2.3 Cuartiles, deciles y percentiles



Introducción



Dado un conjunto de elementos que se ordenan de acuerdo con su magnitud, el valor medio que divide al conjunto de datos en dos partes iguales o la media aritmética de los valores medios de dicho conjunto, dan como resultado a la mediana.

Asociadas a la definición de mediana, tenemos otras medidas que se fundamentan en las divisiones proporcionales que pueden hacerse en datos agrupados o sin agrupar y que se denominan cuartiles. Existen diferentes tipos: **Cuartiles, Deciles y Percentiles.**

2.3.1. Cuartiles

Se definen como los intervalos dentro de los cuales quedan proporcionalmente repartidos los datos sin agrupar o agrupados en una distribución formada por 4 partes iguales.

Se tienen 3 cuartiles que se simbolizan por Q_1 (primer cuartil), Q_2 (segundo cuartil) y Q_3 (tercer cuartil), en donde cada uno contendrá el mismo número de datos, es decir, el 25% del total.

Para determinar el valor de los cuartiles en datos no agrupados, aplicamos la expresión general $\frac{KN}{4}$ y las siguientes reglas:

- Si KN es divisible exactamente 4, el valor del cuartil buscado será la media aritmética entre el dato ordenado cuya posición se obtiene de $\frac{KN}{4}$ y el siguiente dato de orden.
- Si KN no es divisible exactamente entre 4, el valor del cuartil buscado será el dato ordenado cuya posición si obtiene de redondear al entero más próximo el resultado de $\frac{KN}{4}$.

El cálculo de los cuartiles de una distribución de frecuencias se determina matemáticamente por la ecuación general:

$$Q_K = LR_1 + \left[\frac{\frac{KN}{4} - \sum f}{f_k} \right] C$$

Donde:

K = K -enésimo cuartil = Se refiere al primero, segundo y tercer cuartil, según sea el que se tenga que determinar.

LR_1 = Límite real inferior de la clase K -enésimo cuartil.

N = Número total de datos, es decir, la frecuencia total.

$\sum f$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase de K -enésimo cuartil.

f_k = Frecuencia de la clase del K -enésimo cuartil, la cual nunca debe ser mayor que $\frac{KN}{4}$

C = Tamaño del intervalo de la clase del K -enésimo cuartil.



2.3.2 Deciles



Se definen como los intervalos dentro de los cuales quedan proporcionalmente repartidos los datos sin agrupar o agrupados en una distribución formada por 10 partes iguales. Se tienen nueve deciles que se simbolizan por D_1 (primer decil), D_2 (segundo decil), D_3 (tercer decil), ..., D_9 (noveno decil), en donde cada uno contendrá el mismo número de datos, es decir, el 10% del total.

Para determinar el valor de los deciles en datos no agrupados, aplicamos la expresión general $\frac{KN}{10}$.

El cálculo de los deciles de una distribución de frecuencias se determina matemáticamente por la ecuación general:

$$D_K = LR_1 + \left[\frac{\frac{KN}{10} - \sum f}{f_k} \right] C$$

Donde:

K = K -enésimo decil = Se refiere al primero, segundo, tercero, ..., noveno decil, según sea el que se tenga que determinar.

LR_1 = Límite real inferior de la clase K -enésimo decil.

N = Número total de datos, es decir, la frecuencia total.

$\sum f$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase de K -enésimo decil.

f_k = Frecuencia de la clase del K -enésimo decil, la cual nunca debe ser mayor que $\frac{KN}{10}$

C = Tamaño del intervalo de la clase del K -enésimo decil.

2.3.3 Percentiles



Se define como los intervalos dentro de los cuales quedan proporcionalmente repartidos los datos sin agrupar o agrupados en una distribución formada por cien partes iguales.

Se tienen noventa y nueve percentiles que se simbolizan por P_1 (primer percentil), P_2 (segundo percentil), P_3 (tercer percentil), ..., P_{99} (noventa y nueve percentil), en donde cada uno contendrá el mismo número de datos, es decir, el 1% del total.

Para determinar el valor de los percentiles en datos no agrupados, aplicamos la expresión general $\frac{KN}{100}$.

El cálculo de los percentiles de una distribución de frecuencias se determina matemáticamente por la ecuación general:

$$P_K = LR_1 + \left[\frac{\frac{KN}{100} - \sum f}{f_k} \right] C$$



Donde:

K = K -ésimo percentil = Se refiere al primero, segundo, tercero, ..., nonogésimo noveno percentil, según sea el que se tenga que determinar.

LR_1 = Límite real inferior de la clase K -ésimo percentil.

N = Número total de datos, es decir, la frecuencia total.

$\sum f$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase de K -ésimo percentil.

f_k = Frecuencia de la clase del K -ésimo percentil, la cual nunca debe ser mayor que $\frac{KN}{100}$

C = Tamaño del intervalo de la clase del K -ésimo percentil.

Ejemplo para datos no agrupados:

Para el siguiente conjunto de datos ordenados: 76, 77, 81, 82, 83, 88, 92, 95, 99, 102, 105, 107, 108, 110, 112, 116, 119, 123, 125, 128, 131, 135, 137, 140, 142, 146, 149, 152, 155, 158, 161, 164, 166, 168, 171. Determina el Q_3 , D_6 y P_{70} .

Solución:

Como el conjunto tiene $N = 35$ datos:

$$a) Q_3 = \frac{KN}{4} = \frac{3(35)}{4} = 26.25 \approx 26 \text{ redondeado al entero más próximo.}$$

b) $D_6 = \frac{KN}{10} = \frac{6(35)}{10} = 21$ el valor del D_6 será la media aritmética entre el 21° dato ordenado y el siguiente del conjunto, es decir,

$$D_6 = \frac{131+135}{2} = 133 \quad \text{El valor del } D_6 \text{ es } 133.$$

$$c) P_{70} = \frac{KN}{100} = \frac{70(35)}{100} = 24.5 \approx 25 \text{ redondeado al entero más próximo.}$$

Ejemplo para datos agrupados:

La siguiente tabla de distribución de frecuencias registran los pesos en libras de 42 atletas mexicanos que participaron en los *XXIX Juegos Olímpicos* en Beijing en 2008.

Encuentra:

- Cuartil Q_1
- Decil D_9
- Percentil P_{65}

Intervalos (libras)	Frecuencias (atletas)
110 - 116	2
117 - 123	4
124 - 130	7
131 - 137	9
138 - 144	13
145 - 151	6
152 - 158	1
	$N = 42$



Solución: a) Para determinar el primer cuartil Q_1 , usamos los siguientes datos:

Datos	Formula	Sustitución
$\frac{KN}{4} = \frac{1(42)}{4} = 10.5$	$Q_1 = LR_1 + \left[\frac{\left[\frac{KN}{4} - \sum f \right]}{f_k} \right] C$	$Q_1 = 123.5 + \left[\frac{10.5 - 6}{7} \right] (7)$

$$LR_1 = \frac{123 + 124}{2} = 123.5$$

$$\sum f = 2 + 4 = 6$$

$$f_k = 7$$

$$C = 7$$

$$Q_1 = 123.5 + 4.5 = 128$$

El valor del primer cuartil es 128 libras, es decir, 25% de los atletas pesa 128 libras o menos.

b) Para determinar el noveno decil D_9 , usamos los siguientes datos:

Datos	Formula	Sustitución
$\frac{KN}{10} = \frac{9(42)}{10} = 37.8$	$D_9 = LR_1 + \left[\frac{\left[\frac{KN}{10} - \sum f \right]}{f_k} \right] C$	$D_9 = 144.5 + \left[\frac{37.8 - 35}{6} \right] (7)$

$$LR_1 = \frac{144 + 145}{2} = 144.5$$

$$D_9 = 144.5 + 3.27 = 147.77$$

$$\sum f = 2 + 4 + 7 + 9 + 13 = 35$$

$$f_k = 6$$

$$C = 7$$

El valor del noveno decil es 147.77 libras, es decir, 90% de los atletas pesa 147.77 libras o menos.

c) Para determinar el sexagésimo quinto percentil P_{65} , usamos los siguientes datos:

Datos	Formula	Sustitución
$\frac{KN}{100} = \frac{65(42)}{100} = 27.3$	$P_{65} = LR_1 + \left[\frac{\left[\frac{KN}{100} - \sum f \right]}{f_k} \right] C$	$P_{65} = 137.5 + \left[\frac{27.3 - 22}{13} \right] (7)$

$$P_{65} = 137.5 + 2.85 = 140.35$$

$$LR_1 = \frac{137 + 138}{2} = 137.5$$

$$\sum f = 2 + 4 + 7 + 9 = 22$$

$$f_k = 13$$

$$C = 7$$

El valor del sexagésimo quinto percentil es 140.35 libras, es decir, 65% de los atletas pesa 143.75 libras o menos.



Actividades de Apertura

La siguiente tabla de distribución de frecuencias Registra los tiempos en segundos que 35 atletas varones tardan en recorrer los 100 metros planos. Determina:

- Los cuartiles: Q_1 y Q_2 ;
- Los deciles: D_3 , D_6 y D_9
- Los percentiles P_{35} , P_{50} , P_{65} y P_{80} .

Intervalos (segundos)	Frecuencias (atletas)
8.8 - 9.2	2
9.3 - 9.7	5
9.8 - 10.2	13
10.3 - 10.7	9
10.8 - 11.2	6
	$N= 35$



Actividades de Desarrollo

Con los datos calculados de la tabla de distribución de frecuencias anterior:

Intervalos (segundos)	Frecuencias (atletas)	Marca de clase X
8.8 - 9.2	2	
9.3 - 9.7	5	
9.8 - 10.2	13	
10.3 - 10.7	9	
10.8 - 11.2	6	
	$N= 35$	

- Construye el Histograma porcentual indicando en la gráfica el valor de los cuantiles: Q_1 , D_6 y P_{80}
- Constuye el Polígono de frecuencias porcentual indicando en la gráfica el valor de los cuantiles: Q_2 , D_9 y P_{65}



Actividades de Cierre

La siguiente tabla de distribución de frecuencias registra las calificaciones de un segundo examen parcial de Física II de un grupo de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

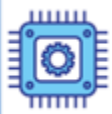
Intervalos (calificaciones)	Frecuencias (estudiantes)	Marca de clase X
30 - 39	1	
40 - 49	2	
50 - 59	4	
60 - 69	7	
70 - 79	11	
80 - 89	8	
90 - 100	3	
	<i>N</i> = 33	

Determina:

- El cuartil Q_3
- Los deciles D_4 y D_7
- Los percentiles P_{25} , P_{50} y P_{90}

Indica también:

- La calificación más baja lograda por el 20% superior de la clase.
- La calificación más alta lograda por el 25% inferior de la clase.
- ¿Cuál es la calificación del 50% de los alumnos?



Actividades de Contextualización o Transversalidad

Realiza la siguiente actividad en una hoja de cálculo Excel:

Los siguientes datos son el resultado de una encuesta realizada vía Facebook a 260 estudiantes para conocer el tiempo que emplean diariamente para realizar las tareas que sus maestros les encargan en línea por estos momentos de pandemia.

12	12	4	12	2	5	7	5	7	3	4	2	2	3
5	7	6	6	5	12	10	12	2	12	2	3	4	6
3	4	8	10	12	13	3	4	5	7	5	8	7	3
5	10	11	6	9	3	4	6	8	5	5	4	5	4
5	6	8	6	6	7	3	4	2	5	5	9	2	3
4	6	2	4	5	2	5	5	7	3	4	6	9	1
1	2	10	11	5	6	5	6	5	7	8	6	6	10
1	2	5	6	6	8	3	11	2	5	6	7	2	4
2	7	3	4	6	8	5	8	5	8	4	6	2	5
5	8	12	2	6	5	7	5	7	9	10	2	4	5
7	2	3	5	7	4	6	6	2	4	6	4	5	5
7	5	8	2	5	2	3	2	5	6	7	2	3	5
8	4	6	8	14	8	2	4	5	8	3	6	12	4
6	2	6	0	3	6	4	7	2	4	4	7	6	8
2	3	2	3	3	4	5	6	2	5	2	3	6	9
4	5	3	5	2	3	3	6	6	3	5	4	6	4
8	3	6	2	4	4	7	4	5	5	4	10	3	5
3	4	8	2	4	5	7	4	5	3	5	3	6	4
5	4	7	2	5	2	3	4						

A partir de ellos calcula en una hoja de Excel:

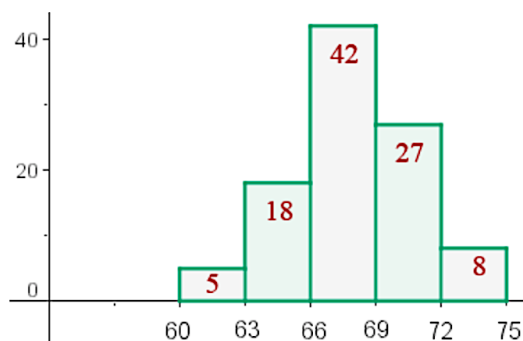
1. Rango, Clases y Amplitud que te permitan...
2. Elaborar una tabla de distribución de frecuencias que contenga: Li, Ls, Marca de clase (X), frecuencia relativa (f), frecuencia relativa acumulada (fa), Frecuencia absoluta (F), Frecuencia absoluta acumulada (Fa), Porcentaje (%), Ojiva >, Ojiva <, Grados para la elaboración de la gráfica circular y el producto de la marca de clase por la frecuencia (Xf) para que te ayuden al cálculo de la media aritmética.
3. Realiza el cálculo de las medidas de tendencia central, Media (\bar{x}), Mediana (Me) y Moda (Mo).
4. Calcula los cuantiles: Cuartiles (Q_3), Decil (D_7) y Percentil (P_{30})
5. Realiza la gráfica de: Ojivas, Circular, Histograma, Polígono de frecuencias



Ejercicios Adicionales

Como reforzamiento de los temas vistos, realiza los siguientes ejercicios:

- 1 El histograma de la distribución correspondiente al peso de 100 alumnos de Bachillerato es el siguiente:



- a) A partir de la gráfica anterior, construye la tabla de frecuencias.
b) ¿A partir de que valores se encuentran el 25% de los alumnos más pesados?

Intervalos (pesos)	Frecuencias (estudiantes)	Marca de clase

2. A partir de los datos de la siguiente tabla de distribución de frecuencias registra las puntuaciones de una prueba de coordinación física dadas a 50 conductores de vehículos que habían consumido alcohol.

INTERVALO (puntuaciones)	FRECUENCIA f (conductores)	MARCA DE CLASE X
50 - 59	8	
60 - 69	18	
70 - 79	12	
80 - 89	7	
90 - 99	5	
	$N = 50$	

Construye:

- a) El histograma porcentual indicando el valor de los cuantiles: Q_3 , D_7 y P_{85}
b) El polígono de frecuencias porcentual indicando el valor de los cuantiles: Q_1 , D_5 y P_{70}



Bloque 3 | Medidas de dispersión

3.1 Rango



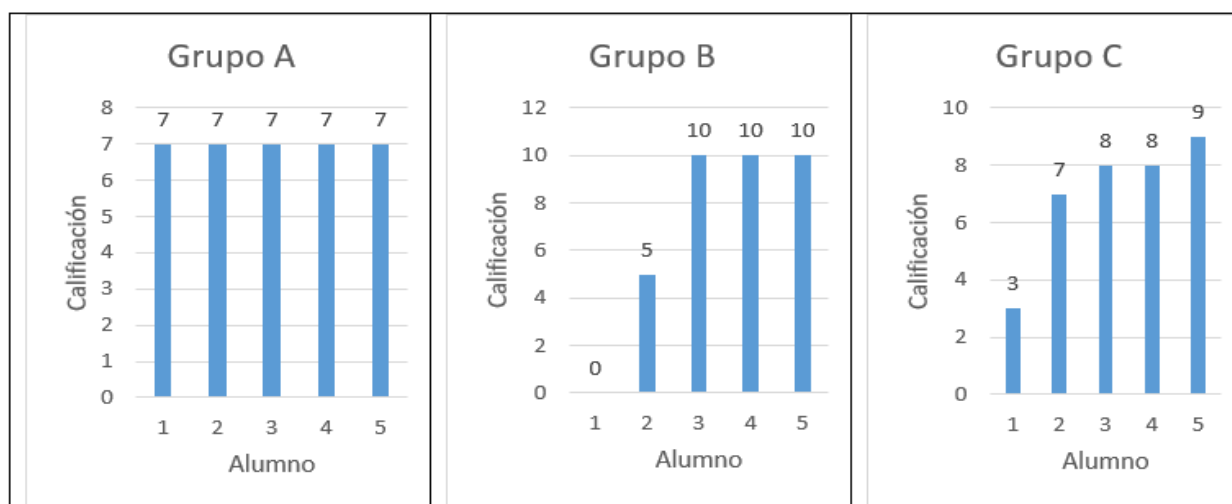
Introducción



¿Por qué estudiar la dispersión?

Las medidas de tendencia central, como la media o la mediana, buscan resumir con un solo número, un conjunto de valores. Desde este punto de vista resultan valiosas, pero no dicen nada sobre la dispersión de los datos, es decir, no describen en qué medida difieren entre sí los valores.

Veamos este ejemplo: Se analizan las calificaciones de los estudiantes de tres grupos en un examen de Probabilidad:



Analiza las gráficas anteriores y contesta lo siguiente:

1. ¿Qué similitudes y diferencias observas entre las gráficas?
2. ¿Cuál gráfica presenta mayor dispersión de los datos?, ¿cuál menor dispersión de los datos?, ¿por qué?
3. ¿Existe alguna relación entre la dispersión de los datos (mayor o menor) y la forma de la gráfica? Argumenta tu respuesta.
4. Para comparar los tres grupos, ¿qué medida de tendencia central recomendarías usar?



5. Con base en la información proporcionada, ¿puedes decir cuál de los grupos logró un mejor aprendizaje? Justifica tu respuesta.

Rango

Supongamos que un guía de turismo puede mencionar que una laguna tiene en promedio 1.2 metros de profundidad. Supongamos que usted no sabe nadar, ¿desearía cruzarla sin solicitar mayor información? Quizá no. Probablemente se preguntaría ¿cuántos metros es su máxima profundidad? ¿Cuántos metros es su mínima profundidad?

Si mide 1.4 metros de máxima profundidad y 1.0 metros de mínima profundidad ¿La cruzaría?

Si mide 1.9 metros de máxima profundidad y 0.5 metros de mínima profundidad ¿La cruzaría?

Cuando los datos se encuentran poco dispersos, es decir, acumulados alrededor de la media aritmética, este valor se considera representativa de los datos. Por el contrario, una medida grande de dispersión indica que la media no es confiable.

El *rango o recorrido* es un valor numérico que indica la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de una población o muestra estadística. Suele ser utilizado para obtener la dispersión total. Es decir, si tenemos una muestra con dos observaciones: 10 y 100 pesos, el rango será de 90 pesos.

Sobre todo, en finanzas, el rango es muy útil para observar cuán grande podría llegar a ser una variación o cambio. Vale la pena mencionar también que, en no pocas ocasiones, el rango no es una medida fija. Por ejemplo, imaginemos que el crecimiento del Producto Interno Bruto (PIB) de un país, ha estado entre el 3 y el 5% durante los últimos 20 años. El rango para estos datos, será del 2% pero esto no quiere decir que siempre vaya a ser ese. De modo que si en el año 21, el crecimiento es del 1%, el rango de los últimos 21 años, pasará del 2% al 6%.

La fórmula que se emplea es:

$$R = x_M - x_m$$

Dónde:

R = Rango o Recorrido

x_M = Dato mayor de la muestra

x_m = Dato menor de la muestra



Actividades de Apertura

En binas calcular la media aritmética y la diferencia entre la calificación mayor y la menor de cada muestra de grupos en Probabilidad y Estadística:

Grupo A 6, 3, 10, 2 y 9

Grupo B 6, 6, 6, 6 y 6

Grupo C 6, 4, 6, 8 y 6

Grupo D 4, 8, 4, 8 y 6

Grupo	Media	Rango
A		
B		
C		
D		



Actividades de Desarrollo

Contestar las siguientes preguntas:

¿Qué grupo presenta mayor rango en sus calificaciones? _____

¿Qué grupo presenta menor rango en sus calificaciones? _____

Observa los datos de los grupos C y D. ¿Cuál de ellos presenta mayor variabilidad? _____

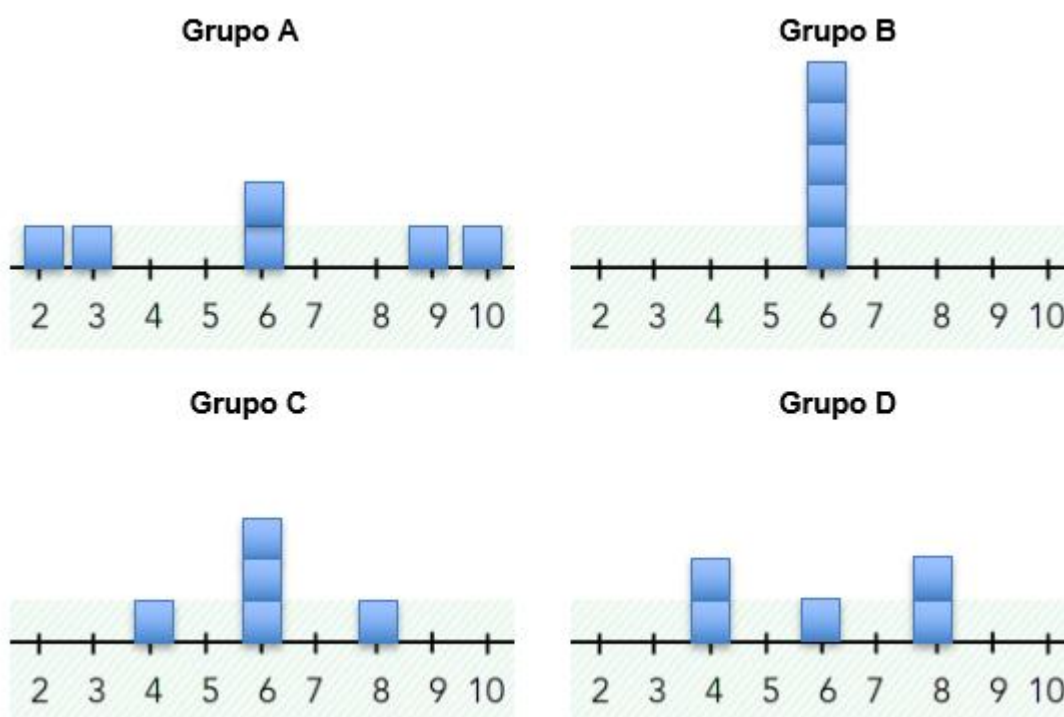
Sin embargo, tienen el mismo rango ¿verdad?



Actividades de Cierre

Imagina que las siguientes rectas numéricas con balanza en donde el número 6, que es la media aritmética es el punto de equilibrio. Coloca las calificaciones como si fueran bloques cuadrados sobre la recta. El grupo A es el ejemplo.

Imagina que las siguientes rectas numéricas con balanza en donde el número 6, que es la media aritmética es el punto de equilibrio. Coloca las calificaciones como si fueran bloques cuadrados sobre la recta. El grupo A es el ejemplo.



Anota y discute tus observaciones con el resto del grupo.



Actividades de Contextualización o Transversalidad

A 5 compañeros de tu grupo hazles las siguientes preguntas y anota en el cuadro las respuestas.

Compañeros	Estatura en cm	Tiempo que tarda en llegar de su casa a la escuela en min.	Número de miembros que habitan en su casa	Edad en años
1				
2				
3				
4				
5				
Rango				

Con los datos y el resultado de los rangos obtenidos, discutan en el grupo sus observaciones y escriban sus conclusiones.



Ejercicios Adicionales

1. Los siguientes datos son los clientes diarios de la florería “El Tulipán Negro”: 34, 45, 23, 34, 26, 32, 31, 41. Calcular el Rango.

2. Los miembros de una cooperativa de viviendas tienen las siguientes edades:

42 60 60 38 60 63 21 66 56 57 51 57 44 45 35

30 35 47 53 49 50 49 38 45 28 41 47 42 53 32

54 38 40 63 48 33 35 61 47 41 55 53 27 20 21

42 21 39 39 34 45 39 28 54 33 35 43 48 48 27

53 30 29 53 38 52 54 27 27 43 28 63 41 23 58

56 59 60 40 24

¿Cuál es la diferencia de edades entre el mayor y el menor de los miembros de la cooperativa? Use la fórmula de Rango.

3.2 Desviación media



Introducción



Esta medida de dispersión nos representa la diferencia absoluta promedio que existe entre cada dato que se encuentra en la muestra y la media de los datos y se determina de la siguiente manera:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Dónde:

x_i = dato i (o primer dato)

\bar{x} = media aritmética de la muestra

n = número de datos en la muestra



La interpretación de los resultados se interpreta como el grado de *alejamiento absoluto promedio* de los datos con respecto a su media.

¿Por qué sacar el valor absoluto de las diferencias entre cada dato y la Media Aritmética? Si solo se hicieran diferencias entre cada dato y la media aritmética, éstas tendrían signos positivos y negativos ya que algunos datos son menores que la media y otros son mayores que la media, luego al sumar las diferencias, con sus signos correspondientes, éstas se irían anulando unas con otras, dando como resultado cero y no sería posible medir el grado de alejamiento promedio de los datos en la muestra.



Actividades de Apertura

Considerando las calificaciones de Probabilidad y Estadística de los alumnos de los grupos del ejemplo anterior. Calcular, en cada caso, las sumas de las desviaciones. Recuerde que todos los grupos tienen media 6. El grupo A es el ejemplo:

$$\text{Para el grupo A: } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}) = (6-6) + (3-6) + (10-6) + (2-6) + (9-6) =$$

Para el grupo B:

Para el grupo C:

Para el grupo D:



Actividades de Desarrollo

Como se puede observar en las actividades de apertura, la suma de las desviaciones siempre es cero. Esto se debe a que, como la media es el valor central, la suma de las diferencias positivas es el inverso aditivo de la suma de las diferencias negativas (si esto no pasara, la balanza no se equilibrara).

1. Ahora, usando el valor absoluto de las desviaciones, calcula la Desviación Media de cada grupo:

$$\text{Para el grupo A: } DM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{|6-6| + |3-6| + |10-6| + |2-6| + |9-6|}{5} =$$

Para el grupo B:

Para el grupo C:

Para el grupo D:



¿Qué podrías poner como observaciones? _____

2. Pregunta a 5 de tus compañeros la calificación que obtuvieron en el primer parcial de Probabilidad y estadística y anótalas en la siguiente tabla y complétala:

Compañero	Calificación	Media \bar{x}	$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})$	$DM = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} }{n}$
1				
2				
3				
4				
5				

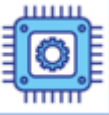


Actividades de Cierre

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Puede servir la Desviación Media para medir la variabilidad total de un conjunto de datos?

2. ¿Por qué? _____



Actividades de Contextualización o Transversalidad

Pregunta a 5 compañeros diferentes lo siguiente y de cada conjunto de datos calcular la Desviación Media

- 1.- ¿Cuántos mensajes de WhatsApp has recibido en el transcurso del día?
- 2.- ¿En este momento cuántos chavos(as) te gustan?
- 3.- ¿Cuántos km son los que más has viajado en cualquier medio de transporte?



Ejercicios Adicionales

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Una muestra de personas arrojaron los siguientes datos que corresponden al número de hermanos que tienen: 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1. Calcular la desviación de estos datos.
2. Hallar la desviación media de los siguientes datos (segundos que tardaron algunos alumnos en contestar una pregunta): 3, 5, 8, 2, 10, 6, 3, 4, 4 y 5.



3.3 Varianza y desviación típica o estándar



Introducción



La varianza es una medida de dispersión que representa la variabilidad de una serie de datos respecto a su media. Formalmente se calcula como la suma de las diferencias al cuadrado divididos entre el total de observaciones.

¿Por qué se elevan al cuadrado los residuos?

La razón por la que las diferencias se elevan al cuadrado es sencilla. Si no se elevasen al cuadrado, la suma de diferencias sería cero. Así pues, para evitarlo, tal como ocurre con la desviación típica se elevan al cuadrado. El resultado de la varianza puede reflejar datos absurdos como litros cuadrados, pesos cuadrados, etc. Para que tenga sentido la interpretación calcularíamos la desviación típica que es la raíz cuadrada de la varianza.

La desviación típica o estándar se hace para poder trabajar en las unidades de medida iniciales. Claro que, como es normal, uno puede preguntarse, ¿de qué sirve tener como concepto la varianza? Bien, aunque la interpretación del valor que arroja no nos da demasiada información, su cálculo es necesario para obtener el valor de otros parámetros.

Para calcular la covarianza, que la veremos en temas posteriores, necesitamos la varianza y no la desviación típica, para calcular algunas matrices econométricas se utiliza la varianza y no la desviación típica. Es una cuestión de comodidad a la hora de trabajar con los datos, según lo que deseemos calcular. En lo general, la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.

También se puede calcular como la desviación estándar o típica al cuadrado. Se usan las siguientes fórmulas:

3.3.1 Varianza

Varianza, para datos NO agrupados

Para una muestra:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Para una población

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (m_i - \mu)^2}{N}$$

Dónde:



x_i = es el dato i en la posición i

\bar{x} = media aritmética de la muestra

μ = media aritmética de la población

n = número de datos de la muestra

N = número de datos de la población

Varianza, para datos agrupados

Para una muestra:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (m_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Para una población

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i (m_i - \mu)^2}{N}$$

3.3.2 Desviación típica o estándar

Desviación típica o estándar muestral

Desviación típica o estándar poblacional

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$



Actividades de Apertura

José, un joven egresado de la universidad, desea realizar un viaje a una ciudad que se encuentre fuera de su país. Ha investigado los costos por noche que implican rentar un cuarto de hotel en tres ciudades diferentes. Al realizar su búsqueda por internet encontró lo siguiente:

Venecia, Italia. Precio promedio por habitación=1,865

Nueva York, USA. Precio promedio por habitación=3,011

Rio de Janeiro, Brasil. Precio promedio por habitación= 797

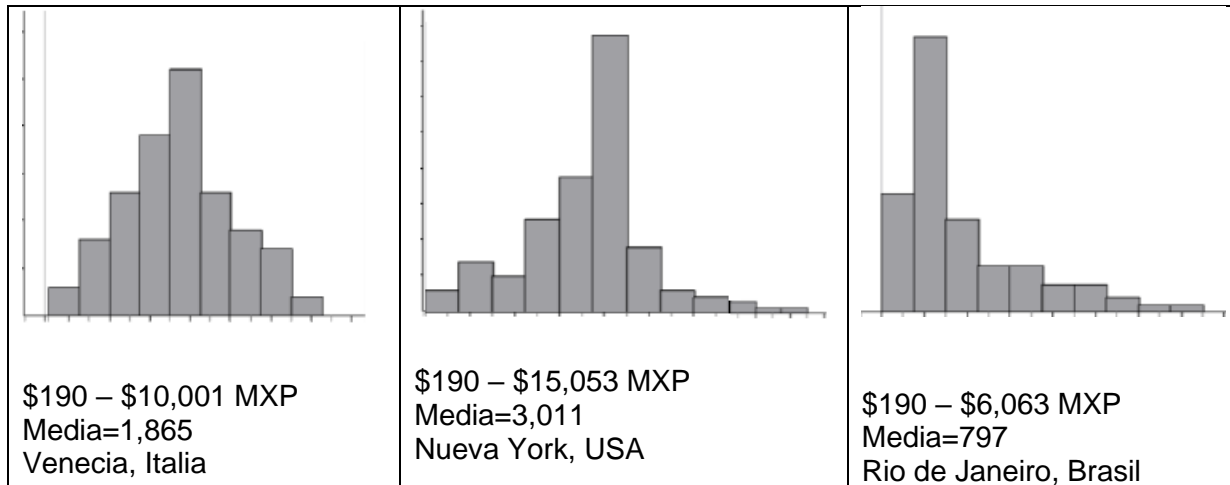
Al conocer estos datos, el joven se decepcionó al pensar que no podría viajar a Nueva York o Venecia dado el elevado costo del hospedaje por noche; en particular al conocer el costo promedio en cada ciudad, pensó casi de inmediato:

“si el costo promedio por noche es de \$3,011 en Nueva York, no tiene caso buscar más opciones de alojamiento en esa ciudad, pues de seguro que todos los cuartos tendrán un costo igual o similar”.

a) ¿Estás de acuerdo con el razonamiento del José?, ¿consideras que debería abandonar su búsqueda por la (supuesta) falta de opciones de alojamientos que sean más económicos?, ¿por qué?



Sintiéndose un poco más optimista, José buscó y revisó más información sobre los costos por noche en el mismo sitio de internet y encontró las siguientes gráficas:



b) ¿Cuál de las tres distribuciones de precios presenta menor variación?

c) ¿Cuál de las tres distribuciones de precios presenta mayor variación?



Actividades de Desarrollo

Supongamos que deseas abrir una cuenta de inversión a tasa variable en una institución financiera. El banco Beta ha ofrecido una tasa de rendimiento del 12, 10, 13, 9 y 11%, mientras que el banco Gama ha proporcionado una tasa del 13, 6, 14, 10 y 12% en los últimos cinco años. Con esta información ¿Cuál banco te ofrece una inversión más segura?

Calcula la varianza de la tasa de rendimiento de los dos bancos y compara los valores. ¿Cambió tu elección?

Calcula la desviación estándar. ¿Qué significa este valor?

Calcular la varianza y desviación estándar de las edades de una población de niños a partir de la siguiente tabla:

Edad (años)	Frecuencia
x_i	f_i
3	9
4	12
5	9



Actividades de Cierre

Pregúntale a 10 de tus compañeros cuánto tiempo demoras en ayudar en las labores del hogar, recomiéndales usar un cronómetro para medir el tiempo.

Calcula la varianza _____ y la desviación estándar _____ del tiempo de recorrido.

Explica el significado de la varianza obtenida _____

Explica el significado de la desviación estándar obtenida



Actividades de Contextualización o Transversalidad

Pregúntale a 10 de tus compañeros cuál es su estatura en metros, lleva una cinta métrica para obtener los datos. Analiza los resultados y explica los resultados a tus compañeros.

Los siguientes son los puntajes de un grupo de adolescentes en un test de Agudeza Visual: 25, 12, 15, 23, 24, 39, 13, 31, 19, 16. Calcular la varianza de estos datos y desviación estándar de los datos.



Ejercicios Adicionales

1. Dada la siguiente distribución de edades, x en años de niños que han padecido varicela

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Frecuencia	4	9	11	8	7	4	5	2	2	0	1

Calcular la desviación estándar.

2. El chef en jefe de cierto restaurante acaba de recibir dos docenas de tomates de su proveedor, pero todavía no los acepta. Sabe por la factura que el peso promedio de un tomate es de 7.5 onzas, pero insiste en que todos tengan un peso uniforme. Aceptará los tomates solo si el peso promedio es de 7.5 onzas y la desviación estándar es menor que 0.5 onzas. Los pesos de los tomates son los siguientes:

6.3	7.2	7.3	8.1	7.8	6.8	7.5	7.8	7.2	7.5	8.1	8.2
8.0	7.4	7.6	7.7	7.4	7.5	8.4	7.4	7.6	7.4	6.2	7.4

¿Cuál es la decisión del chef?

3. Los niños, a diferencia de los adultos, tienden a recordar las películas, cuentos e historias como una sucesión de acciones más que el argumento en forma global y de conjunto. En el relato de una película, por ejemplo, utilizan con frecuencia las palabras "y entonces...". Una psicóloga con suprema paciencia pidió a 25 niños que le contaran una determinada película que ellos habían visto. Consideró la variable: cantidad de "y entonces..." utilizados en el relato y registró los siguientes datos: 15, 19, 17, 18, 17, 16, 16, 21, 23, 20, 15, 17, 20, 22, 17, 19, 20, 18, 11, 31, 17, 19, 18, 40.

Como parte del mismo estudio la experimentadora obtuvo de 25 adultos el mismo tipo de datos. Estos fueron: 10, 5, 13, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 10, 3, 11, 14, 8, 12, 5, 10, 9, 7, 11, 14, 10, 15, 9, 4.

Calcular la varianza e indique en cuál grupo los integrantes son más parecidos en cuanto a la cantidad de "y entonces..." utilizados en el relato de una película. Justificar la respuesta.



Varianza del grupo de niños =

Varianza del grupo de adultos =

4. Varianza y desviación estándar para datos agrupados. Completando la siguiente tabla, calcular a) La desviación media, b) La varianza y c) La desviación típica o estándar.

Intervalos	Frecuencia absoluta f_i	Marcas de Clase x_i	$x_i f_i$	Distancia $ x_i - \bar{x} $	$(x_i - \bar{x})^2$
5 - 5.5	1				
5.5 - 6	2				
6 - 6.5	3				
6.5 - 7	4				
7 - 7.5	8				
7.5 - 8	1				
8 - 8.5	5				
Total					



Bloque 4 | Medidas de forma

4.1 Sesgo



Introducción



Las medidas de forma son indicadores que ofrecen información acerca de la manera en que los datos se encuentran contenidos dentro de una distribución; se clasifican en dos grupos: las medidas de sesgo o asimetría y las medidas de apuntamiento o curtosis.



Actividades de Desarrollo

El sesgo es una medida que indica qué tan simétrica o asimétrica es una distribución, se clasifican en:

- Distribución simétrica** Se llama, si los datos que tiene se encuentran repartidos de forma semejante en ambos lados de la media, por lo que en una distribución simétrica la moda, la mediana y la media son iguales
- Distribución asimétrica** Se llama si tiene los datos con las frecuencias más bajas ubicadas del lado derecho o izquierdo de la media

Existen dos tipos de asimetrías

La asimetría a la izquierda

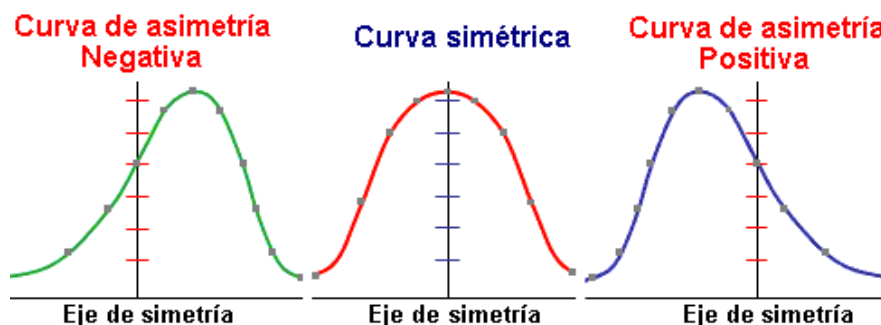
También llamada asimetría negativa que es aquella en la que los datos con las frecuencias más bajas se ubican a la izquierda de la media y los datos con mayor frecuencia se encuentran a la derecha.

En la asimetría negativa la Media es menor que la Mediana y la mediana es menor que la Moda.

La asimetría a la derecha

También llamada asimetría positiva que es aquella en la que los datos con las frecuencias más bajas se ubican a la derecha de la media y los datos con mayor frecuencia se encuentran a la izquierda.

En la asimetría positiva la Moda es menor que la Mediana y la mediana es menor que la Media.





Analiza el siguiente vídeo.

<https://www.youtube.com/watch?v=88lpvX0YEso>



El coeficiente de Fisher es una herramienta que sirve para determinar la simetría o la asimetría de una distribución.

Su fórmula es

$$S_f = \frac{\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^3}{S^3}$$

N = Número total de datos.

\bar{X} = La media aritmética

S = Desviación estándar

El coeficiente de Fisher cumple con las siguientes características.

Si $S_f = 0$ significa que la distribución es simétrica

Si $S_f > 0$ significa que la distribución tiene sesgo positivo

Si $S_f < 0$ significa que la distribución tiene sesgo negativo

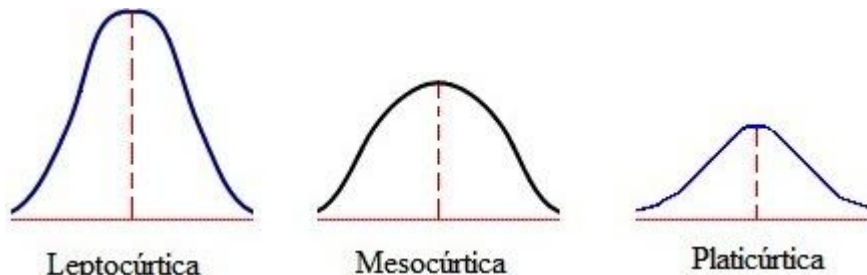
4.2 Apuntamiento o curtosis

El apuntamiento o curtosis mide que tan achatada o tan puntiaguda es una distribución.

De acuerdo con este análisis, las distribuciones se clasifican en tres tipos

Distribución leptocúrtica	Es una distribución que contiene una gran concentración de datos en la zona central
Distribución mesocúrtica	Es una distribución que contiene una concentración de datos mediana en la zona central
Distribución platicúrtica	Es una distribución que contiene una baja conglomeración de datos en su región central.

Las siguientes imágenes pueden ayudarte a visualizar los conceptos anteriores.





Actividades de Cierre

Contesta las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué son las medidas de forma?
2. ¿Qué es sesgo?
3. ¿Qué es una distribución simétrica?
4. Escribe la diferencia que existe entre asimetría positiva y asimetría negativa.
5. Anota ¿qué es el coeficiente de Fisher?
6. De acuerdo con el valor que tiene el coeficiente de Fisher, ¿cómo se clasifican las distribuciones?
7. ¿Qué es apuntamiento o curtosis?
8. ¿Qué es distribución leptocúrtica?
9. ¿Qué es distribución mesocúrtica?
10. ¿Qué es distribución platicúrtica?



Bloque 5 | Medidas de correlación

5.1 Coeficiente de correlación



Introducción



Hasta este momento se han abordado los cálculos de diferentes medidas que nos describen un comportamiento general, su distribución y sus tendencias de una variable. Las medidas de correlación permiten relacionar diversas variables y determinar si tienen o no dependencia alguna entre ellas.



Actividades de Apertura



Revisa la siguiente lección: "Introducción a la Correlación",
https://www.youtube.com/watch?v=KNf5soJ4_yk



Actividades de Desarrollo

En el departamento de orientación educativa se están organizando conferencias para orientar a los estudiantes en la elección de su carrera a elegir, se buscará la mejor orientación basados en sus calificaciones que determinan sus actitudes y capacidades. Para facilitar la obtención de información al estudiante, se analizarán correlaciones entre sus calificaciones de dos de sus materias, por ejemplo, para el área de físico-matemáticas, se tomarían de Álgebra, Geometría, Cálculo, Física o Química.



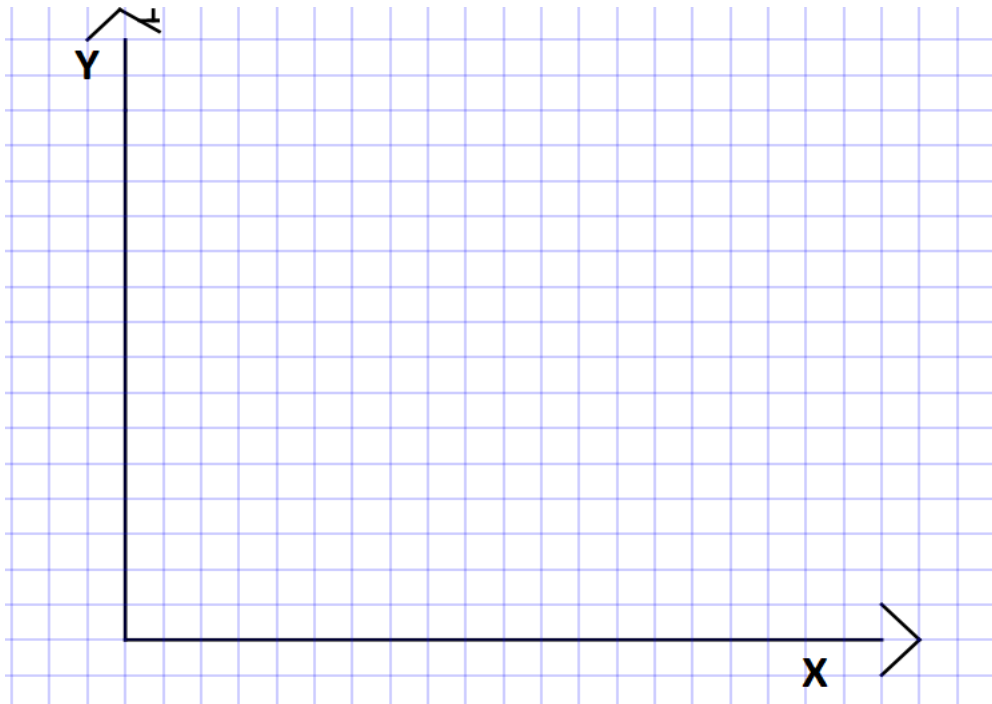


Tomemos los siguientes datos de 10 alumnos para ver la relación de sus materias:

Alumno	Cálculo Integral	Física
Alumno 1	48	56
Alumno 2	53	77
Alumno 3	77	82
Alumno 4	44	67
Alumno 5	69	85
Alumno 6	79	86
Alumno 7	84	93
Alumno 8	68	76
Alumno 9	61	58
Alumno 10	55	45

De la tabla de calificaciones, contesta y desarrolla lo que se te pide a continuación:

- a) Al graficar esta información, usando como abscisas las calificaciones de Cálculo integral y como ordenadas las calificaciones de Física, donde cada punto (x, y) será registrado calificación por alumno.



Si observas los puntos del gráfico anterior, ¿qué tendencia muestra el conjunto?

Para conocer o dar una respuesta certeza a la pregunta del inciso b) calculemos el coeficiente de correlación "r"



$$r = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

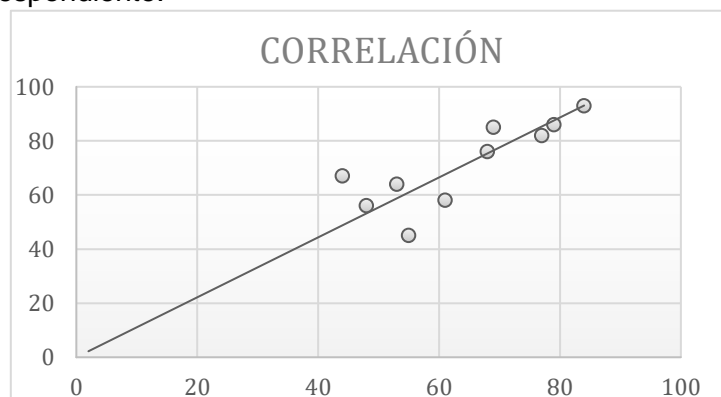
Tomemos Cálculo Integral como la variable X y Física como la variable Y.
Completemos la tabla con la información que necesitamos:

x Cálculo	y Física	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
48	56	-15.8	-15.2	240.16	249.64	231.04
53	64	-10.8	-7.2	77.76	116.64	51.84
77	82	13.2	10.8	142.56	174.24	116.64
44	67	-19.8	-4.2	83.16	392.04	17.64
69	85	5.2	13.8	71.76	27.04	190.44
79	86	15.2	14.8	224.96	231.04	219.04
84	93	20.2	21.8	440.36	408.04	475.24
68	76	4.2	4.8	20.16	17.64	23.04
61	58	-2.8	-13.2	36.96	7.84	174.24
55	45	-8.8	-26.2	230.56	77.44	686.44
638	712		Sumas	1568.4	1701.6	2185.6
63.8	71.2					

$$r = \frac{1568.4}{\sqrt{1701.6}\sqrt{2185.6}} = \frac{1568.4}{(41.2504545)(46.7504011)} = 0.8133$$

Como podemos observar "r" tiene un valor positivo, quiere decir que las variables tienen una dependencia positiva, es decir que si en entra más alta calificación tenga en matemáticas también subirá la de física. Estos alumnos si son uno buenos candidatos al área de Físico-matemáticas.

Esta es la gráfica correspondiente:





También puedes realizar el ejercicio usando una hoja de Excel, para ello:



Revisa la siguiente lección: " Coeficiente de Correlación",

https://www.youtube.com/watch?v=cRv_Ff315J4&t=15s



Actividades de Cierre

Realiza en tu cuaderno el siguiente ejercicio: Determina si existe una correlación entre las calificaciones de asignaturas de Cálculo Diferencial e inglés.

Alumno	Cálculo Diferencial	Inglés
Alumno 1	44	100
Alumno 2	53	94
Alumno 3	66	90
Alumno 4	69	83
Alumno 5	73	80
Alumno 6	79	78
Alumno 7	81	74
Alumno 8	84	70
Alumno 9	89	68
Alumno 10	95	63



Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1: Se midió el peso de 12 personas (x), y la extensión de su cintura (y). Se obtuvieron los siguientes datos.



Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	80	75	90	95	70	65	85	83	78	68	73	92
y	100	90	100	110	90	95	120	120	115	90	99	105

Determina si existe una correlación lineal entre ambas mediciones

$$r = \text{-----} = \text{-----} =$$

x Peso	y Cintura	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
80	100					
75	90					
90	100					
95	110					
70	90					
65	95					
85	120					
83	120					
78	115					
68	90					
73	99					
92	105					



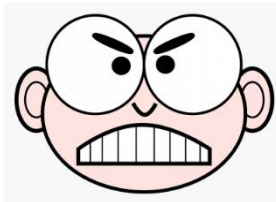
Gráfica

Calcula el coeficiente de correlación o relación que existen entre el peso y la medida de la cintura.

Coeficiente de correlación = _____

Argumentación: _____

Ejercicio 2: Se registraron en la tabla siguiente la edad (en años) y la conducta agresiva (medida en una escala de cero a 10) de 10 niños.



Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x edad	6	6	6.7	7	7.4	7.9	8	8.2	8.5	8.9
y conducta	9	6	7	8	7	4	2	3	2	1



x Edad	y Conducta	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
6	9					
6	6					
6.7	7					
7	8					
7.4	7					
7.9	4					
8	2					
8.2	3					
8.5	2					
8.9	1					

Existe relación alguna entre la edad y la conducta agresiva de los niños.

$$r = \text{_____} = \text{_____} =$$

Gráfica

Coefficiente de correlación = _____

Argumentación: _____



5.2 Recta de regresión



Introducción

La recta de regresión intenta sustituir a todo un conjunto de puntos de un diagrama de dispersión y facilitar los cálculos necesarios para determinar la tendencia que presentan las dos variables de interés. No siempre se puede trazar dicha recta de regresión para determinar la tendencia. Esta recta también nos sirve para extra polar y conocer datos de que no se encuentran en la tabla de información.



Actividades de Apertura



Revisa la siguiente lección: "Recta de Regresión Lineal",
<https://www.youtube.com/watch?v=9U-cCKW-qDA&t=12s>



Actividades de Desarrollo

Es hora de calcular la recta de regresión lineal de un conjunto de datos
 Sea la ecuación de la recta

$$y = bx + a + \epsilon$$

Donde:

b = Es la pendiente de la recta, este valor debe estimarse a partir de la tendencia de los puntos

a = Es la ordenada al origen, es decir, el punto en que la recta cruza el eje Y

y = Es la variable dependiente

x = Es la variable independiente

ϵ es el error

$$b = \frac{COV_{xy}}{S_x} \quad \text{donde } S_x \text{ es la Varianza de } x$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \text{donde } \bar{y} \text{ es la media de la variable } y, \bar{x} \text{ es la media de la variable } x$$

$$COV_{xy} = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1} \quad S_x = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$



Ahora tomemos los datos de la tabla del ejercicio planteado en el Tema de Coeficiente de Correlación

x Cálculo	y Física	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
48	56	-15.8	-15.2	240.16	249.64	231.04
53	64	-10.8	-7.2	77.76	116.64	51.84
77	82	13.2	10.8	142.56	174.24	116.64
44	67	-19.8	-4.2	83.16	392.04	17.64
69	85	5.2	13.8	71.76	27.04	190.44
79	86	15.2	14.8	224.96	231.04	219.04
84	93	20.2	21.8	440.36	408.04	475.24
68	76	4.2	4.8	20.16	17.64	23.04
61	58	-2.8	-13.2	36.96	7.84	174.24
55	45	-8.8	-26.2	230.56	77.44	686.44
638	712		Sumas	1568.4	1701.6	2185.6
63.8	71.2					

Vamos a sustituir los valores:

$$COV_{XY} = \frac{1568.4}{9} = 174.266667$$

$$S_x = \frac{1701.6}{9} = 189.066667$$

$$b = \frac{174.267}{189.067} = 0.92172073$$

$$a = 71.2 - (0.9217207)(63.8) = 12.394217$$

Entonces obtenemos la ecuación de la recta: **$y=0.9217x+12.3942+€$**



Actividades de Cierre

Encuentra la ecuación de la Recta Lineal del ejercicio anterior.

Alumno	Cálculo Diferencial	Inglés
Alumno 1	44	100
Alumno 2	53	94
Alumno 3	66	90
Alumno 4	69	83
Alumno 5	73	80
Alumno 6	79	78
Alumno 7	81	74
Alumno 8	84	70
Alumno 9	89	68
Alumno 10	95	63



Ejercicios Adicionales

- Rescata el ejercicio de la actividad de cierre del tema de Coeficiente de correlación referente a los pesos y medidas de cintura para calcular la ecuación de la recta de regresión correspondiente

x Peso	y Cintura	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
80	100					
75	90					
90	100					
95	110					
70	90					
65	95					
85	120					
83	120					
78	115					
68	90					
73	99					
92	105					

$$COV_{XY} =$$

$$S_x =$$



$$b =$$

$$a =$$

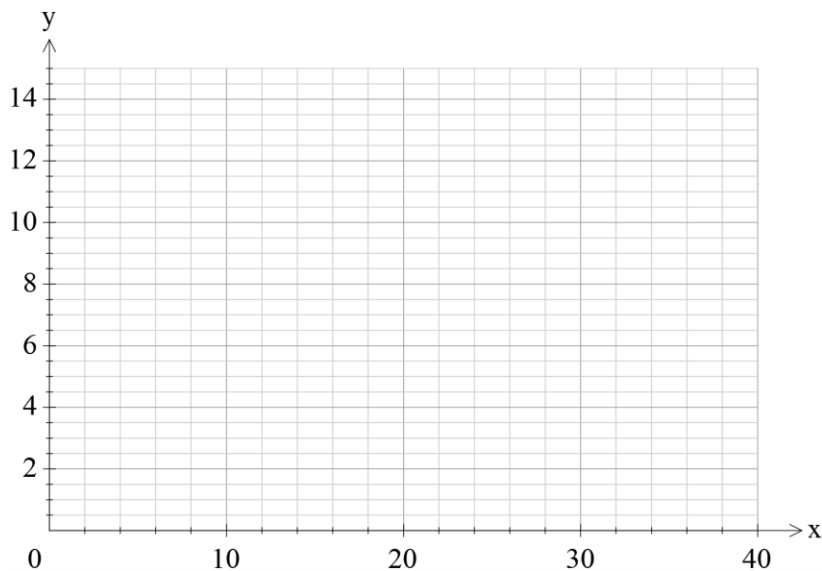
Por tanto, la recta queda de la siguiente forma

$$y =$$

2. Un centro comercial sabe que, en función de la distancia, en kilómetros, a la que se sitúe de un núcleo de población, acuden los clientes, en cientos (por día), que figuran en la tabla:

Caso	N.º de Clientes (en cientos) y	Distancia (en Km) x	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	8	15					
2	7	19					
3	6	25					
4	4	23					
5	2	34					
6	1	40					
Sumas							
Medias							

- a) Construye el gráfico de dispersión de las variables y grafica la recta de regresión





Cálculo de los Coeficientes de Regresión:

a=

b=

Ecuación de la Recta de regresión:

Estima el número de clientes que debe esperarse si el Centro Comercial se construye a 2 km de la población:

Calcula el Coeficiente de Correlación:

¿Qué interpretación se da al valor coeficiente de correlación?:



5.3 Error estándar de estimación



Introducción



El error de estimación nos mide el grado de alejamiento de existe entre cada punto del diagrama de dispersión y la recta de regresión. Debido a que la recta no pasa por cada uno, si así sucediera no sería entonces una recta, se dice entonces que se comete un error al definir la Recta de Regresión Lineal.



Actividades de Apertura



Revisa la siguiente lección: “Error Estándar”,
<https://www.youtube.com/watch?v=LWbVyDzmlaA&t=11s>



Actividades de Desarrollo

Siguiendo con el ejercicio inicial, definamos el error mediante la siguiente ecuación:

Recordemos que:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}{N - 2}}$$

Lo tomamos de la primera tabla donde hicimos los cálculos

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2185.6}{10-2}} = 16.53$$

El error se obtiene del cálculo de una raíz por tanto su valor es “+” “-”

Así nos quedaría la ecuación de la Recta de regresión lineal:

$$y = 0.9217x + 12.3942 \pm 16.529$$



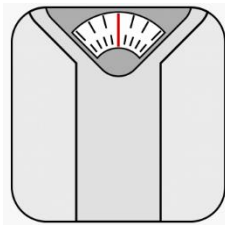
Actividades de Cierre

Calcula la estimación del error del ejercicio de la recta de regresión lineal que encontraste en la Actividades de **cierre del punto 5.2**.



Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1: Se midió el peso de 12 personas (x), y la extensión de su cintura (y). Se obtuvieron los siguientes datos.



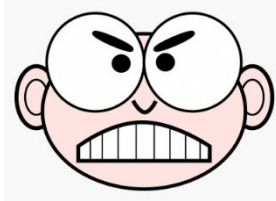
Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	80	75	90	95	70	65	85	83	78	68	73	92
y	100	90	100	110	90	95	120	120	115	90	99	105

Calcula el error de la estimación de la recta de Regresión Lineal que se aproxima a este conjunto de datos.

Error = _____



Ejercicio 2: Se registraron en la tabla siguiente la edad (en años) y la conducta agresiva (medida en una escala de cero a 10) de 10 niños.



Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x edad	6	6	6.7	7	7.4	7.9	8	8.2	8.5	8.9
y conducta	9	6	7	8	7	4	2	3	2	1

Calcula el error de la estimación de la recta de Regresión Lineal que se aproxima a la relación entre la edad y la conducta de los niños.

Error = _____

Ejercicio 3: Calcula el error estándar de estimación del ejercicio 2 de la página 86



Bloque 6 | Teoría de conjuntos

6.1 Elementos básicos

6.1.1 Diagrama de Venn-Euler



Introducción



Te habrás dado cuenta que los conjuntos también se pueden representar gráficamente mediante diagramas de Venn- Euler, que consisten en círculos que contienen en un interior los elementos del conjunto. En el estudio de conjuntos es necesario establecer uno de los conjuntos del cual proceden todos los conjuntos con los cuales se efectúan las operaciones. Por ejemplo, la mayoría de los conjuntos numéricos puede usarse como origen el conjunto de los números reales. Al conjunto que se considera como el origen de todos los conjuntos con los que estamos trabajando se le denomina conjunto universo y lo podemos representar con la letra “U” mayúscula, como ya se mencionó anteriormente. Este conjunto Universal será un

rectángulo, que encierre todos los conjuntos representados por círculos, así podemos comprender que el complemento de un conjunto contiene todos los elementos de ese conjunto y que también pueden estar en el universo.



Actividades de Apertura

Analiza en tu casa las cosas que te rodean, podrás observar que están acomodadas de tal manera que sea fácil encontrarlas. Por ejemplo, en el refrigerador, encontrarás la fruta en un lado, en otro espacio encontrarás la leche o jugos, en otro espacio, la carne, etc.

De igual manera los diagramas de Venn- Euler nos sirven para acomodar los conjuntos y establecer relaciones que tienen entre ellos.

Dibuja en tu cuaderno el refrigerador de tu casa y como ordenarías lo que hay adentro.



Actividades de Desarrollo

Dado los siguientes conjuntos:

$$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$$

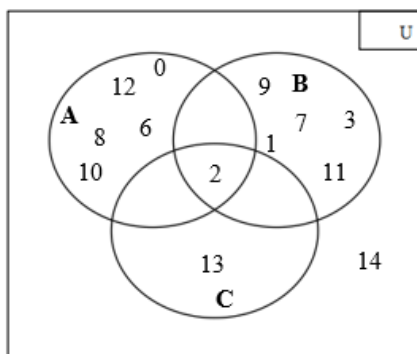
$$A = \{0,2,4,6,8,10,12\}$$

$$B = \{1,2,3,5,7,9,11\}$$

$$C = \{2,4,5,13\}$$



El diagrama de Venn- Euler del sistema formado con estos conjuntos es:



Actividades de Cierre

1.- Piensa en un diagrama de Venn- Euler que puedas realizar con los siguientes conjuntos y desarróllalo en tu libreta.

$$U = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\}$$

$$A = \{-1, -2, -3\}$$

$$B = \{-1, -4, -6\}$$

$$C = \{-1, -3\}$$

6.1.2 Conjunto



Introducción

Nuestro entorno está formado por conjuntos, por ejemplo; tu familia, escuela, casa, ropa, las estrellas, planetas, jugadores favoritos de algún deporte de nuestro gusto, etc., todos ellos son conjuntos. Dado que los conjuntos aparecen en todo nuestro entorno, es de vital importancia saber expresarlos y conocer los procedimientos para relacionar sus elementos con los de otros conjuntos.

En Matemáticas, los números y las cantidades son conjuntos; en Geometría o en Trigonometría las figuras geométricas también son conjuntos y tienen elementos en común, por ello es necesario conocer reglas, formas y operaciones que permitan trabajar con ellos y que sea posible usarlos en las aplicaciones cotidianas del ser humano.

Un conjunto es una colección de elementos organizados por alguna característica en común.

Es importante que el conjunto este definido sin ambigüedades, respecto a los elementos que forman parte de él.

Conjunto: "Clase de objetos definida apropiadamente"¹

¹ Márquez Elías, M.A.(2007). Probabilidad y Estadística. DGETI.SEP.



Los conjuntos se definen con letras mayúsculas, a las cuales se asigna una expresión entre llaves y sus elementos se separan con comas. Cómo este es un tema muy amplio tu facilitador te explicará las propiedades de los conjuntos y sus operaciones con más detalle.



Actividades de Apertura

Observa dentro de tu mochila, las cosas que guardas en ella se organizan de acuerdo a ciertas características, por ejemplo, en tu lapicera guardas, lápices, lapiceros, colores, sacapuntas, borrador y cosas que te servirán en clases, en otro espacio de tu mochila guardas tus libretas de las diversas materias, en otro espacio tus libros, etc.

Como verás existen conjuntos de cosas que guardamos ordenadamente considerando ciertas características en común.

Ahora observa el video y analízalo, esto permitirá entender el concepto básico sobre conjuntos.



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=PZN6jyw1Nqk>



Actividades de Desarrollo



Recordemos que los conjuntos se pueden definir por Comprensión o por Extensión. Por extensión cuando enumeras cada uno de los elementos.
Ejemplo.

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Por comprensión cuando describes el conjunto por alguna característica en particular o en general.
Ejemplo:

$$A = \{x/x \in N, x < 7\}$$

Conjunto bien definido.

V es el conjunto de vocales $V = \{a, e, i, o, u\}$

Conjunto que no está bien definido.

$M = \{10 \text{ mejores deportistas}\}$

Este segundo ejemplo no está bien definido por qué no se puede determinar ¿En qué deporte o deportes? o ¿Quiénes son?

Rosita tiene un conjunto de frutas ella desea clasificar la fruta para colocarla dentro de su refrigerador, pretende colocarla según su estructura.

Observa el conjunto U =Universo de fruta que tiene Rosita para clasificar su fruta de la siguiente manera:

$U = \{\text{Melón, Sandía, mango, uvas, fresas, plátano, manzanas, peras,}\}$

Escribe en el conjunto A , las frutas de cáscara suave y en el conjunto B las frutas de cáscara dura.



Si no tienes el espacio suficiente escribe esta actividad de desarrollo en tu libreta de apuntes y en la libreta de ejercicios inventa otros ejemplos como este.

$$A = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$B = \{ \quad \quad \quad \}$$

Si Rosita quisiera agregar un conjunto donde indique frutas sin cáscara, cuales frutas escribiría dentro del conjunto C.

$$C = \{ \quad \quad \quad \}$$



Actividades de Cierre

Pon a prueba tu ingenio y escribe por lo menos 10 conjuntos que observes a tu alrededor. Realízalo en tu libreta de apuntes.

Resuelve el siguiente ejercicio y escribe los siguientes conjuntos por extensión en tu libreta.

Conjunto P de planetas del sistema solar.

$$P = \{ \quad \quad \quad \}$$

Conjunto de números Naturales.

$$N = \{ \quad \quad \quad \}$$

Conjunto de números Enteros

$$Z = \{ \quad \quad \quad \}$$

Conjunto de números pares menores que 10

$$A = \{ \quad \quad \quad \}$$

Conjunto de números impares mayores que -7 y menores que 9

$$B = \{ \quad \quad \quad \}$$

De que otra manera podría escribir este último ejemplo por comprensión.

$$B = \{ \quad \quad \quad \}$$



6.1.3 Subconjunto



Introducción

Cuando todos los elementos de un conjunto A son elementos contenidos en otro conjunto B, se dice que A es subconjunto de B. Esto se denota mediante la expresión $A \subset B$



Actividades de Apertura

Un subconjunto es una parte de un conjunto o bien que el subconjunto está incluido dentro de un conjunto más grande.

Si tu observas las cosas que tienen en la mochila, podrás observar que tienes varios subconjunto dentro de la mochila, como ya habíamos analizado anteriormente. En una de las bolsas de tu mochila por ejemplo tienes otra bolsa donde tienes un subconjunto ejemplo monedero en el cual están incluidos todos los elementos de ese conjunto y ahí encontrarás tal vez monedas y billetes.

Observa el video y analiza.



https://www.youtube.com/watch?v=e31Th_hFB5c



Actividades de Desarrollo

Analicemos un ejemplo sobre subconjuntos. Sean los conjuntos A y B:

$$A = \{1,3,5,7,18\}$$

$$B = \{1,7,18\}$$

Donde podemos observar que:

$$B \subseteq A$$

B es subconjunto de A



Actividades de Cierre

Analiza los siguientes conjuntos indica quien es el subconjunto.

Sean los conjuntos F y G

$$F = \{\mathbf{Figuras geométricas}\}$$

$$G = \{\mathbf{Triángulos, cuadriláteros}\}$$

Puedes desarrollar 5 ejercicios sobre este tema, puedes buscarlos en libros de tu biblioteca o bien virtuales que puedas encontrar.



6.1.4 Pertenencia



Introducción



Un elemento pertenece a un conjunto, cuando este, está contenido dentro del conjunto de referencia.

El símbolo que se usa para indicar pertenencia es:

$$\in$$

Por el contrario, cuando un elemento no pertenece a un conjunto, quiere decir que ese elemento no está contenido en el conjunto de referencia.

Símbolo de no pertenece es:

$$\notin$$

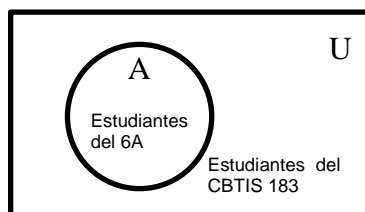

Actividades de Apertura

Supongamos que tu escuela la observamos como un conjunto Universo, el grupo en el que estas inscrito(a) pertenece a tu escuela, esto nos indica que tu grupo está incluido dentro de ese grupo Universo.

Ejemplo si tú eres un estudiante del 6 A del CBTIS 183, podríamos decir que el 6 A pertenece al CBTIS 183.

$$U = \{\text{estudiantes del CBTIS 183}\}$$

$$A = \{\text{estudiantes del 6A de la especialidad de electricidad}\}$$



Observa el video y analiza.

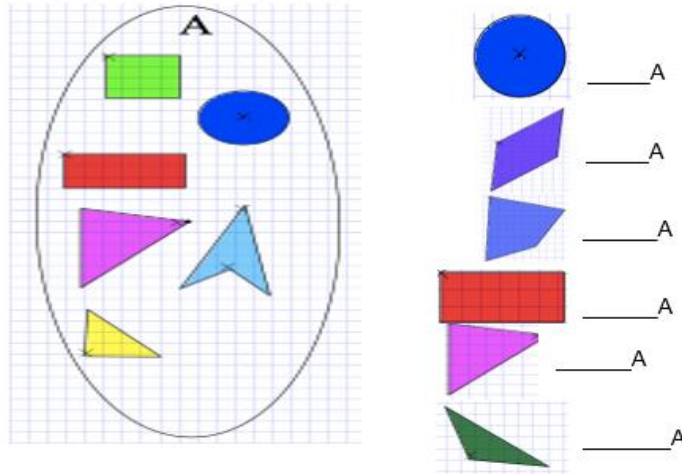
<https://www.youtube.com/watch?v=C260x7UApNg>



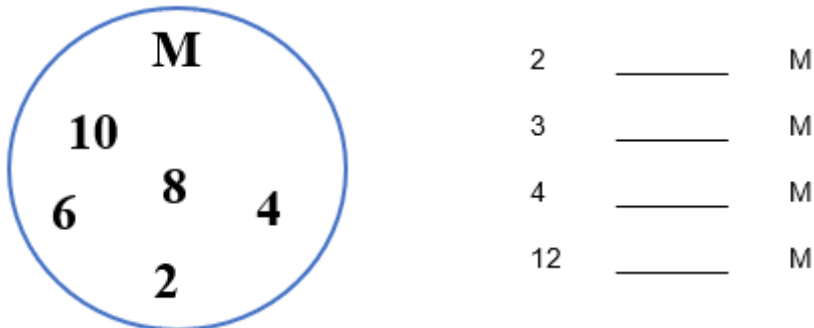


Actividades de Desarrollo

Observa el siguiente conjunto A, e identifica que figura pertenece al conjunto y escribe el símbolo de pertenece o no pertenece según sea el caso.



Este es otro ejemplo con números, escribe los símbolos de "pertenece" o "no pertenece".



Actividades de Cierre

Dibuja en tu libreta un ejemplo parecido, puedes utilizar otros conjuntos de figuras, objetos, cosas, personas, etc.



6.1.5 Conjunto universo



Introducción

El conjunto universo, es aquel que contiene a todos los elementos de interés, mayormente se representa con la letra U mayúscula.



Actividades de Apertura

Imagina a todos los planteles que pertenecen a la UEMSTIS, podemos considerarlo como un conjunto universo, es finito porque tiene un número limitado de planteles, lo podemos considerar como conjunto Universal.

Si hablamos de personas en el planeta tierra podemos considerarlo como conjunto Universal o Conjunto Universo de igual manera porque existen millones de personas en el planeta Tierra.

Existen Conjuntos Universos que están limitados y otros que son infinitos, como el conjunto Universal de las estrellas en el Universo estelar.

Entonces podemos observar que el Conjunto Universo puede estar determinado por un límite de elementos o bien de manera ilimitada.



Observa el video y analiza.

https://www.youtube.com/watch?v=L_J0UOf_u5s



En el siguiente ejemplo se presenta el conjunto universo

$$U = \{x/x \text{ es una letra de nuestro alfabeto en México}\}$$

Representa de otra forma el universo anterior, recuerda que puede ser por comprensión y por extensión, desarróllalo en tu libreta.

$$U = \{ \quad \quad \quad \}$$



Actividades de Cierre

Piensa y escribe en tu libreta, en 5 diferentes universos no muy extensos en los que puedas representarlos por extensión y por comprensión.



6.1.6 Conjunto vacío



Introducción

El conjunto vacío, es el conjunto que no contiene elementos. Se representa con las siguientes expresiones o símbolos:

$$\emptyset \quad \{ \}$$



Actividades de Apertura

Analicemos al conjunto vacío. En esta contingencia, analicemos el mes de mayo de 2020, si te pregunto ¿En este momento cuantos estudiantes están en clases normales? La respuesta será ningún estudiante porque todos están en sus casas realizando sus tareas y trabajos. Podemos afirmar que si le asignamos una letra para determinar el conjunto podemos decir:

$$A = \{ \text{Estudiantes que están en clase en el mes de mayo 2020} \}$$

Este conjunto es vacío

$$A = \{ \}$$



Observa el video y analiza.

https://www.youtube.com/watch?v=L_JOUOf_u5s



Actividades de Desarrollo

Un ejemplo del conjunto Vacío se presenta cuando queremos definir al conjunto de todos los números naturales que sean negativos, es decir: $B = \{x/x < 0, x \in N\}$

Sabemos que los números Naturales se definen como enteros positivos, por lo que en este conjunto no pueden existir negativos, en consecuencia $B = \emptyset$



Actividades de Cierre

En un experimento lanzamos un dado, representamos los posibles resultados con los elementos del conjunto R.

$$R = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$F = \{ \text{al lanzar el dado obtengo el número 9} \}$$

¿Cómo es el conjunto resultante?:

Escribe tu propia conclusión sobre el conjunto vacío:



6.2 Operaciones con conjuntos

6.2.1 Unión



Introducción

La unión de conjuntos, consiste en formar un conjunto que contenga todos los elementos de los conjuntos que se unen. Así la unión del conjunto A con el conjunto B es el conjunto que tiene todos los elementos del conjunto A y todos los elementos de B. El símbolo de la unión es \cup de tal manera que, para representar la unión de los conjuntos A y el conjunto B, se representa $A \cup B = B \cup A$



Actividades de Apertura

Cuando se unen dos conjuntos, el nuevo conjunto unión, está formado por los elementos de ambos conjuntos, quiere decir que pertenecen al primer conjunto o al segundo conjunto. Si considero dos conjuntos A y B como conjuntos se puede definir de la siguiente manera:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=MSxklyHOCvA>



Actividades de Desarrollo

Sean los siguientes conjuntos:

$$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{3,6,7,9,10\}$$

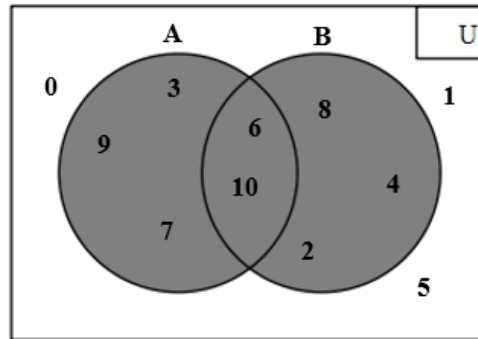
$$B = \{2,4,6,8,10\}$$

Entonces

$$A \cup B = \{2,3,4,6,7,8,9,10\}$$

Esta unión se puede representar mediante un diagrama de Venn- Euler.

$$A \cup B = \{2,3,4,6,7,8,9,10\}$$



Actividades de Cierre

Desarrolla en tu libreta el siguiente ejercicio, tu facilitador te proporcionará otros ejercicios para que puedas practicar.

1.- Dados los conjuntos:

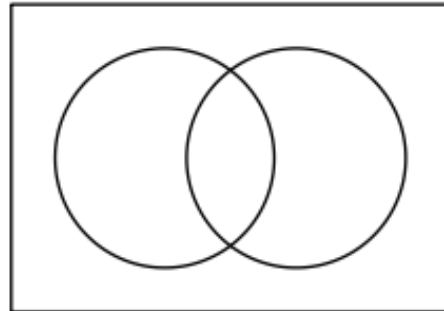
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$$

$$A \cup B = \{ \quad \quad \quad \}$$

Represéntalo en el diagrama de Venn- Euler



2.- Dado los siguientes conjuntos

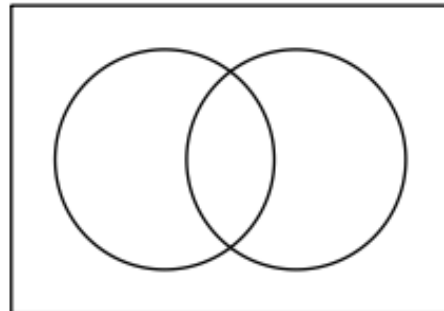
$$U = \{\text{letras del alfabeto}\}$$

$$M = \{a, e, i, o, u\}$$

$$N = \{a, m, e, r, i, c, a\}$$

$$M \cup N = \{ \quad \quad \quad \}$$

Represéntalo en el diagrama de Venn- Euler

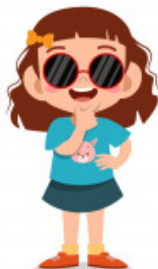




6.2.2 Intersección



Introducción



La intersección de conjuntos, es el conjunto formado con todos los elementos de un conjunto que también pertenecen a otro conjunto, es decir, la intersección del conjunto A con el conjunto B es el conjunto de todos los elementos del conjunto A que pertenecen al conjunto B y viceversa. El símbolo de la intersección es \cap

La intersección se expresa de la siguiente manera $A \cap B$. También se cumple que $A \cap B = B \cap A$



Actividades de Apertura

Cuando tenemos dos conjuntos, ejemplo el conjunto A y el Conjunto B, la intersección de estos dos conjuntos, es un nuevo conjunto en el cual están contenidos los elementos comunes de ambos conjuntos, lo cual quiere decir que están tanto en el Conjunto A y en el conjunto B.

Se puede definir de la siguiente manera:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=11Z2gOSyl7k&t=6s>



Actividades de Desarrollo

Sea los conjuntos:

$$M = \{a, e, i, o, u\}$$

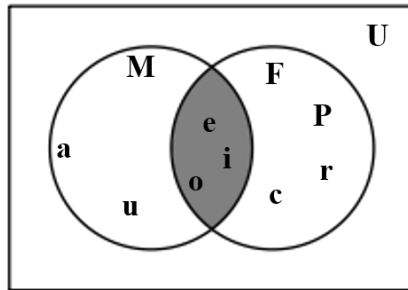
$$F = \{p, e, r, i, c, o\}$$

La intersección de los dos conjuntos es:

$$M \cap F = \{e, i, o\}$$

Se puede representar mediante un diagrama de Venn- Euler.

$$M \cap F = \{e, i, o\}$$



Actividades de Cierre

Analiza el siguiente ejercicio y determina el conjunto intersección, puedes trabajar en tu libreta.

1. Sean los conjuntos Universo U y conjuntos A y B .

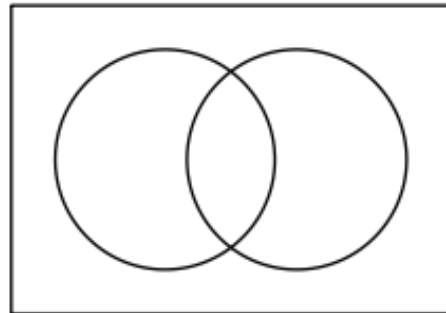
$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{x/x \text{ es un número par}, x \in U\}$$

$$B = \{x/x \text{ es un número impar}, x \in U\}$$

Determina: $A \cap B =$

Y representa su diagrama de Venn- Euler.



2.- Sean los conjuntos Universo U y conjuntos F y G

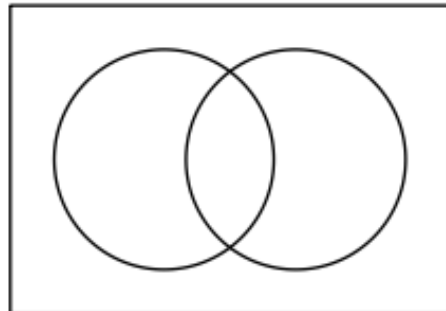
$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, ll, m, n, ñ, o, p, q, r\}$$

$$F = \{a, m, o, r\}$$

$$G = \{p, e, r, o\}$$

Determina: $F \cap G = \{ \quad \quad \quad \}$

Y representa su diagrama de Venn- Euler.





6.2.3 Complemento



Introducción

Sea A un subconjunto, de un conjunto universal U . El complemento del conjunto A , considerando el Universo U , es el conjunto A' o A^c , de todos los elementos del universo U , que no pertenecen al conjunto A .



Actividades de Apertura

El conjunto complemento se refiere a comprender que si en un conjunto ejemplo A , deseamos determinar su complemento, este nuevo conjunto complemento son los elemento que están en el Universo y no pertenecen al conjunto A , se puede definir como se expresa a continuación:

$$A^c = A' = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$$



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=yjRO-1n6OUo>



Sea el conjunto Universo y el conjunto A

$$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

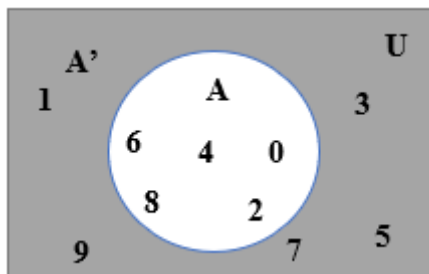
$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

Su complemento es:

$$A^c \text{ o } A' = \{1,3,5,7,9\}$$

Esto se puede representar en un diagrama de Venn Euler.

$$A^c \text{ o } A' = \{1,3,5,7,9\}$$





Actividades de Cierre

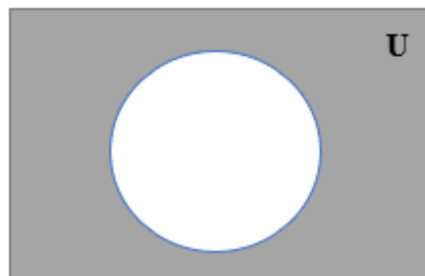
Analiza el siguiente ejercicio y determina el conjunto complemento, puedes trabajar en tu libreta.
1.- Sean los conjuntos Universo U y conjuntos A y B .

$$U = \{x/0 \leq x \leq 10, x \in N\}$$

$$B = \{2,4,6,8\}$$

Determina el conjunto complemento y represéntalo mediante un diagrama de Venn- Euler.

$$B' = \{ \quad \quad \quad \}$$



6.2.4 Diferencia



Introducción

La diferencia entre los conjuntos A y B , se pueden representar de la siguiente manera:
 $A-B$ o $B-A$, que dan lugar a conjuntos diferentes.

$A-B$ es el conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a B , mientras que $B-A$ es el conjunto de todos los elementos de B que no pertenecen al conjunto A .



Actividades de Apertura

Si consideramos al conjunto A y al conjunto B , la diferencia $A-B$, es el conjunto de elementos de A que no son elementos de B determinándolos de la siguiente manera:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Por el contrario $B-A$ se puede entender de la siguiente manera:

$$B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=GGLmJityzcw>





Actividades de Desarrollo

Sean los conjuntos

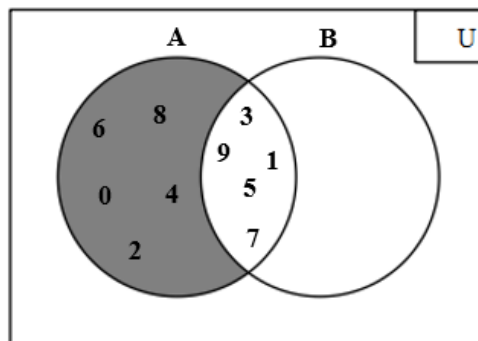
$$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$B = \{1,3,5,7,9\}$$

$$A - B = \{0,2,4,6,8\}$$

Esto se puede representar con un diagrama de Venn- Euler.

$$A - B = \{0,2,4,6,8\}$$



Proponemos otro ejemplo.

Sea el siguiente Universo U , conjuntos M y N .

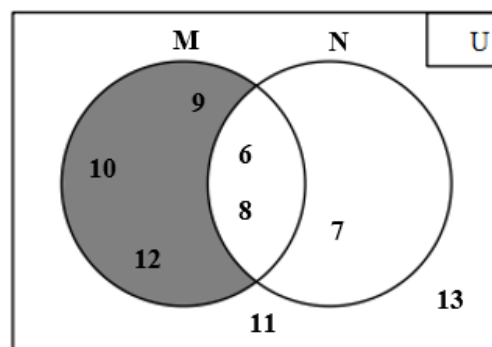
$$U = \{6,7,8,9,10,11,12,13\}$$

$$M = \{6,8,9,10,12\}$$

$$N = \{6,7,8\}$$

$$M - N = \{9,10,12\}$$

$$M - N = \{9,10,12\}$$





Actividades de Cierre

Analiza y desarrolla en tu libreta el siguiente ejercicio.

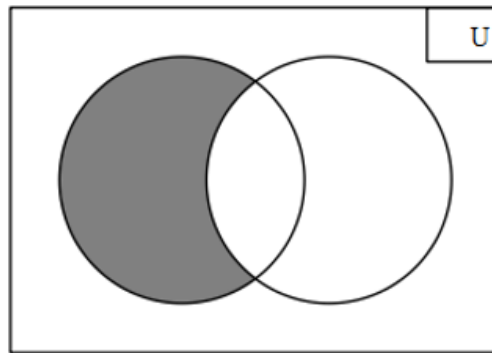
1.-Dados los siguientes conjuntos.

$$U = \{\text{letras de nuestro alfabeto}\}$$

$$M = \{a, e, i, o, u\}$$

$$N = \{a, m, e, r, i, c, a\}$$

$$M - N =$$



6.3 Representación de operaciones mixtas con hasta tres conjuntos



Introducción

Para el desarrollo de las operaciones mixtas se requiere que el estudiante domine los temas analizados anteriormente, comprendiendo los elementos y operaciones con conjuntos, puesto que esos elementos básicos permitirán encontrar las soluciones de este tipo de ejercicios.



Actividades de Apertura

En este último tema analizado, nos permitirá observar como podemos trabajar con tres conjuntos diferentes y que tienen algunas similitudes o números, objetos, elementos similares, lo cual nos permitirá poner en práctica todo lo analizado en los temas anteriores.

Aquí podrás poner en juego tu capacidad cognitiva y de orden superior para poder analizar ejercicios que contienen tres conjuntos y donde aparecen varias operaciones de las analizadas anteriormente. Tu facilitador podrá explicarte con más detalle el tema y podrás realizar otros ejercicios que te permitan desarrollar tu creatividad y capacidad para analizar y proponer ejemplos de este tipo.



Actividades de Desarrollo

Sean los siguientes conjuntos:

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

$$A = \{x/x = 2n - 1, n \in N, x \in U\}$$

$$B = \{x/x \text{ es un número primo}, x \in U\}$$

$$C = \{4,5,6,8,9,11,12\}$$

Realicemos la siguiente operación.

$$B' \cap (C \cup A)' =$$

Este ejercicio lo podemos desarrollar de la siguiente manera:

Retomamos los conjuntos de una manera que se pueda entender mejor.

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

$$A = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

$$B = \{2,3,5,7,11,13\}$$

$$C = \{4,5,6,8,9,11,12\}$$

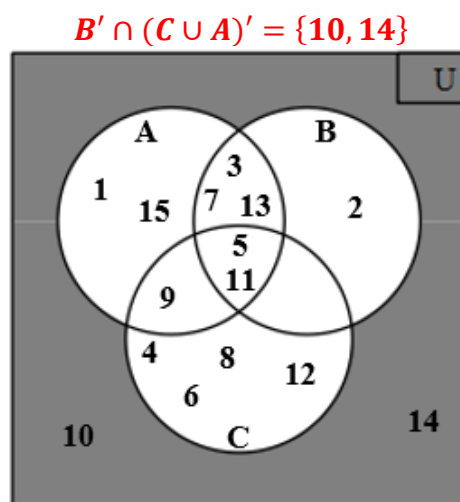
$$B' \cap (C \cup A)' =$$

$$B \cap (C \cup A) = \{2,3,5,7,11,13\} \cap \{4,5,6,8,9,11,12\} \cup \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

$$B' \cap (C \cup A) = \{1,4,6,8,9,10,12,14,15\} \cap \{1,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,15\}$$

$$B' \cap (C \cup A)' = \{1,4,6,8,9,10,12,14,15\} \cap \{2,10,14\} = \{10,14\}$$

Diagrama de Venn – Euler.



**Actividades de Cierre**

Con los mismos conjuntos de la explicación anterior, determina las siguientes operaciones y represéntalas en un diagrama de Venn – Euler.

Retomemos nuevamente los conjuntos

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

$$A = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

$$B = \{2,3,5,7,11,13\}$$

$$C = \{4,5,6,8,9,11,12\}$$

a) $A \cup B =$

b) $(A \cap B) \cup C' =$

c) $A' \cap (B \cap C) =$



Bloque 7 | Técnicas de Conteo

7.1 Elementos básicos



Introducción



A las técnicas de conteo también se les conoce como análisis combinatorio; permite determinar el número posible de resultados lógicos que cabe esperar al realizar algún experimento o evento, sin necesidad de enumerarlos todos.

Con frecuencia se presentan problemas en los cuales, por ejemplo, una institución bancaria debe proporcionar a los usuarios una tarjeta de crédito o de débito; una compañía de teléfonos debe asignar a cada suscriptor un número; y un gobierno estatal una placa de circulación para cada vehículo. La solución de este tipo de problemas implica calcular cuántos subconjuntos distintos se pueden formar con un conjunto de números. El sistema elegido, debe ser lo suficientemente amplio para cubrir el número de usuarios previsto.

A cada número, objeto o suceso se le llama elemento; a cada colección o grupo de elementos se le identifica como una combinación, y a cada ordenamiento único se le identifica como una permutación.

Una combinación es un conjunto de elementos diferentes en cualquier orden.

Una permutación se caracteriza por el orden de los elementos que la forman.



Actividades de Apertura

Una cafetería indica que con los ingredientes lechuga, tomate, salsa de tomate y cebolla, se puede preparar una hamburguesa, en una de sus 16 formas posibles. ¿Está el anuncio en lo correcto?

Para corroborar la información del anuncio, indica con un Sí que se añade ese ingrediente, o de lo contrario, un No. Utiliza la siguiente tabla:

	Lechuga	Tomate	Salsa	Cebolla
1	Sí	Sí	Sí	Sí
2	Sí	Sí	Sí	No
3	Sí	Sí	No	Sí
4	Sí	Sí	No	No
5	Sí	No	Sí	Sí
6	Sí	No	Sí	No
7	Sí	No	No	Sí
8	Sí	No	No	No
9	No	Sí	Sí	Sí
10	No	Sí	Sí	No
11	No	Sí	No	Sí
12	No	Sí	No	No
13	No	No	Sí	Sí
14	No	No	Sí	No
15	No	No	No	Sí
16	No	No	No	No



Si con esos cuatro ingredientes puede prepararse la hamburguesa en 16 formas distintas, ¿de cuántas formas podría prepararse si hubiera 10 ingredientes disponibles? ¿Es necesario enumerarlos para saber de cuántas formas pueden prepararse una hamburguesa?



Actividades de Desarrollo

1. Revisa la imagen y responde lo que se plantea a continuación:



- ¿De cuántas maneras distintas se pueden acomodar las prendas?
 - ¿De cuántas maneras distintas pueden combinarse las prendas si se las pone un compañero?
- Supongamos que un restaurante ofrece 5 entradas, 4 platos principales y 3 postres. ¿De cuántas formas un cliente puede ordenar una comida?
 - ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 personas en una banca, si hay 4 espacios disponibles?
 - En una clase de 10 alumnos, se van a distribuir 10 premios. ¿De cuántas formas puede hacerse si los premios son diferentes?
 - Encuentra el número de distintos grupos de tres personas que se pueden formar, a partir de un grupo de 10 personas.
 - Calcula cuántos números enteros diferentes de tres dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 si no pueden repetirse.
 - Tu madre desea obsequiarte una laptop y una mochila para tu cumpleaños. Visitan a un distribuidor de equipos de cómputo; revisan cinco modelos de laptops (A, B, C, D, E) y 10 modelos de mochilas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). ¿De cuántas formas se puede elegir el par de artículos?
 - Si en casa tienes cuatro objetos para decorar cada una de las esquinas de tu sala; determina de cuántas maneras distintas se pueden acomodar los adornos, para que sean vistos.



Actividades de Cierre

Diseñar un Muestrario en Papel Opalina utilizando los colores como elementos de insumo, 7 colores básicos (rojo, verde, amarillo, azul, rosado, naranja, negro).

El muestrario será conformado con agrupaciones No ordenadas de 3 colores, mismos que no deberán repetirse en grupos siguientes.





ESPACIO MUESTRAL, EVENTO Y DIAGRAMA DE ÁRBOL

7.1.2. Espacio muestral, evento y diagrama de árbol



Introducción



El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se conoce como **espacio muestral**; cada uno de ellos es un **punto muestral** y el resultado que obtenemos o esperamos obtener al realizar una o varias veces el mismo experimento es un **evento o suceso**.

Los **eventos** se clasifican en dos: **Evento elemental o simple**: Es conjunto formado por un solo resultado. **Evento compuesto**: Es el conjunto formado por dos o más posibles resultados.

Si el experimento se repite dos o más veces, el número de resultados posibles cambia notoriamente al igual que la naturaleza de los puntos muestrales. Veamos.

Ejemplo: Determinamos el espacio muestral resultante de echar dos volados.

Solución: se trata de un experimento formado por dos repeticiones del mismo tipo: echar un volado. Pensando un poco, encontramos que los resultados posibles pueden ser 2 águilas, 1 águila y 1 sol, 1 sol y un águila, 2 soles. Usando las iniciales correspondientes, podemos anotar este espacio muestral como sigue:

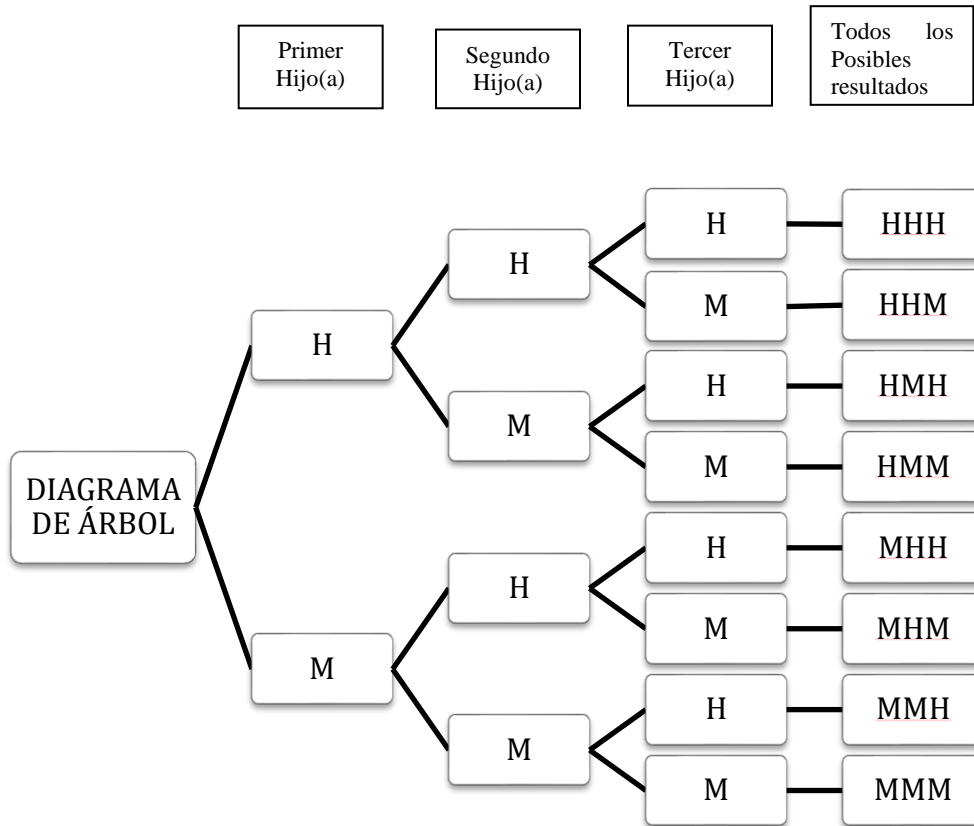
(AA, AS, SA, SS)

Como acabamos de ver, la determinación del espacio muestral de experimentos que implican una o dos repeticiones de su tipo, como echar uno o dos volados, tirar dos veces un dado, planear tener dos hijos, es muy fácil ya que basta una simple inspección. No obstante, cuando se quiere conocer a todos los resultados posibles de una serie de experimentos o repeticiones del mismo tipo, en el cual los puntos muestrales son necesariamente eventos conjuntos, esa facilidad desaparece rápidamente y se torna más y más difícil a medida que se alarga la serie. Por fortuna, para resolver estos casos existe una técnica conocida como:

DIAGRAMA DE ÁRBOL, cuya aplicación conduce metódicamente al espacio muestral que se quiere conocer. Explicaremos en que consiste recurriendo a un ejemplo.

Ejemplo; Se nos informa que una pareja planea procrear tres hijos. ¿De cuántas maneras diferentes puede suceder este hecho? En otras palabras: ¿Cuál es el espacio muestral del experimento “procrear 3 hijos”?

Solución: Sea H el evento “ser Hombre” y M el evento “ser Mujer”. Es evidente que el primer hijo puede ser tanto de un sexo como del otro; las dos ramas primarias de la figura siguiente ilustran la situación. Para el segundo y el tercer hijo, la posibilidad de cualquiera de los dos sexos sigue siendo la misma; en consecuencia, de cada rama primaria se desprenden dos secundarias y, de cada secundaria, dos terciarias con lo cual se termina el diagrama necesario para resolver el problema.





7.2 Principio fundamental de la multiplicación



Introducción

El **principio fundamental de conteo** establece que si hay “p” formas de hacer una cosa, y “q” formas de hacer otra cosa, entonces hay “ $p \times q$ ” formas de hacer ambas cosas, (resultados posibles del experimento). El **principio de conteo** puede extenderse a situaciones donde tenga más de 2 opciones, por ejemplo, si hay “p” formas de hacer una cosa, “q” formas para una segunda cosa, y “r” formas de hacer una tercera cosa, entonces hay “ $p \times q \times r$ ” formas de hacer las tres cosas.



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=u6qc-hglUcg>



Ejemplo 1.

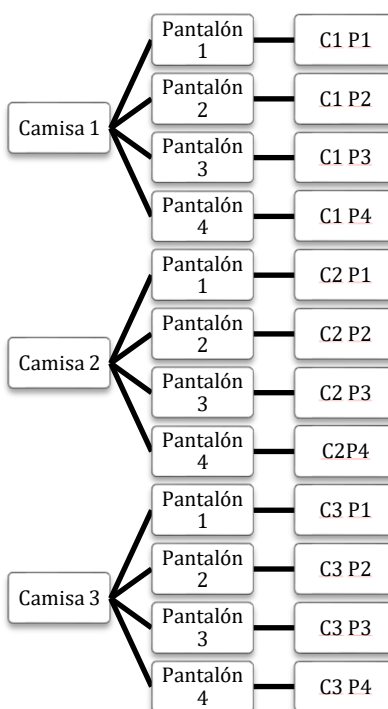
Silvia tiene 3 camisas (Blusas) llámémoslas C_1, C_2, C_3 , y 4 pantalones (llamémoslos P_1, P_2, P_3, P_4). Entonces Silvia puede hacer, $3 \times 4 = 12$ combinaciones posibles:

$C_1P_1, C_1P_2, C_1P_3, C_1P_4$

$C_2P_1, C_2P_2, C_2P_3, C_2P_4$

$C_3P_1, C_3P_2, C_3P_3, C_3P_4$

Esta ordenación puede ilustrarse con un “diagrama de árbol” como se muestra en la figura siguiente:





Ejemplo 2.

Suponga que lanza un dado de 6 lados y elige una ficha de domino de 28 piezas. Hay 6 resultados posibles con el dado, y 28 resultados posibles con el grupo de piezas del domino, así, hay un total de

$6 \times 28 = 168$ resultados posibles del experimento, ¿será práctico elaborar el diagrama de árbol para saber el número de resultados posibles?

Ejemplo 3.

Suponga que lanza un dado de 6 lados y elige una ficha de domino de 28 piezas, al mismo tiempo se tira un volado (se arroja una moneda al aire). ¿Cuántos resultados posibles existen? Hay 6 resultados posibles con el dado, y 28 resultados posibles con el grupo de piezas del domino y dos resultados posibles para la moneda, así, hay un total de

$6 \times 28 \times 2 = 336$ resultados posibles del experimento, nuevamente la pregunta podría ser ¿será práctico elaborar el diagrama de árbol para saber el número de resultados posibles?

Ejemplo 4.

¿Cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse con los dígitos 1, 3, 5, 7, 9?

Solución. El primer evento es seleccionar el primer dígito, el segundo evento es seleccionar el segundo dígito y el tercer evento es seleccionar el tercer dígito. Hay 5 maneras de seleccionar el primer dígito, y para cada manera de seleccionar el primero habrá 4 maneras de seleccionar el segundo dígito (pues de los 5 dígitos que disponemos, ya usamos 1 y nos quedan 4), y por cada una de esas maneras habrá 3 maneras de seleccionar el tercer dígito (pues de los 5 dígitos que disponemos, ya usamos 2 y nos quedan 3), entonces, hay $5 \times 4 \times 3 = 60$ números que podemos formar.

En los ejemplos anteriores del principio de multiplicación, del enunciado se deduce fácilmente los eventos y la cantidad de resultados posibles para cada uno, lo que hace que apliquemos el principio de multiplicación directamente, casi con los ojos cerrados y como si fuera una fórmula. Sin embargo, habrá situaciones un poco más complejas donde el principio de la multiplicación no se aplique directamente. Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.

¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos hay? Nota: Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo 12321 y 72227.

Solución. Como se puede observar, el enunciado no nos habla de eventos que se realizan, ni mucho menos de la cantidad de posibles resultados para cada evento. Lo primero será razonar un poco sobre



el ejercicio y ver a dónde nos lleva: Si tenemos un número de 5 cifras que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda entonces el 1er y 5to dígito deben ser iguales, de la misma forma el 2do y 4to dígito son iguales, y el 3er dígito puede ser lo que sea (pues ocupa la misma posición de izquierda a derecha que de derecha a izquierda); entonces basta con elegir los primeros tres dígitos de nuestro número (y el 4to y 5to dígito los igualamos al 2do y 1er dígito respectivamente) para formar un número capicúa de 5 dígitos.

Este razonamiento ya nos deja ver los eventos que debemos considerar: el primer evento es elegir el 1er dígito, el segundo evento es elegir el 2do dígito, y el tercer evento es elegir el 3er dígito. Hay 9 formas de elegir el primer dígito (los dígitos del 1 al 9, el 0 no porque no sería un número de 5 dígitos, por ejemplo 02620 no es válido), y por cada una de estas formas hay 10 formas de elegir el 2do dígito (los dígitos del 0 al 9), y por cada una de estas hay 10 formas de elegir el 3er dígito (los dígitos del 0 al 9), así, hay un total de $9 \times 10 \times 10 = 900$ números capicúas de 5 dígitos.

Es importante notar lo siguiente: para poder hacer uso del principio de multiplicación es necesario que de los eventos que estemos considerando, para cada uno de los resultados de un evento la cantidad de opciones del siguiente evento sea la misma. Por ejemplo, en el Del ejemplo 1, la selección de la camisa no altera la cantidad de opciones de pantalón, pues para cada camisa de entre las 3 que hay, siempre habrá 4 posibles pantalones, haciendo entonces que haya $4+4+4=3 \times 4 = 12$ combinaciones.

¿Qué pasa entonces si, en el Ejemplo 1, añadimos la restricción de que la primera camisa no se ve bien con 2 de los 4 pantalones y que por lo tanto no debemos considerar esas combinaciones? No podemos usar solo el principio de multiplicación, pues si la camisa seleccionada es la primera entonces hay 2 opciones de pantalón, y si la camisa seleccionada es cualquiera de las otras 2 entonces hay 4 opciones de pantalón, así, habrá en total $1 \times 2 + 2 \times 4 = 10$ combinaciones. Lo que hicimos entonces fue dividir en dos casos el problema, cuando la primer camisa era seleccionada y cuando no, y para cada caso resolvimos el total de combinaciones usando el principio de multiplicación, y después usamos el **principio de la suma** para llegar a que la respuesta es $1 \times 2 + 2 \times 4 = 10$.

A continuación, presentamos de forma detallada el principio de la suma.

7.3 Principio fundamental de la suma



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=u6qc-hglUcg>



Si un evento «A» se puede realizar de «m» maneras diferentes, y otro evento «B» se puede realizar de «n» maneras diferentes, además, **si ocurre uno no puede ocurrir el otro**, (son mutuamente excluyentes) entonces, el evento A o el evento B, se realizarán de $m + n$ formas.

Es decir, aquí ocurre A u ocurre B. El «o» indica suma.

Ejemplo 6:



¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad “A” hasta la ciudad “B” sabiendo que se dispone de 3 autos diferentes 4 y trenes distintos? El viaje se puede realizar en auto o en tren.

Dado que el viaje se puede realizar en auto o en tren, se tienen $3 + 4 = 7$ opciones diferentes para ir de la ciudad “A” hasta la ciudad “B”.

Ejemplo 7: ¿Cuántos resultados se pueden obtener si se lanza un dado o una moneda?

Solución: Es evidente que al lanzar un dado se tienen seis resultados posibles, y al lanzar una moneda, se tienen 2 resultados posibles, por lo tanto:

El número de resultados posibles es $2 + 6 = 8$

Ejemplo 8: ¿Cuántos números pares de 2 cifras empiezan con 1 o 2?

Nota: el cero se considera par

Solución, los que inician con uno son (12, 14, 16, 18, 10) más los que inician con 2 son, (22, 24, 26, 28, 20) en total son 10 números.

En los ejemplos anteriores, se deduce fácilmente cuáles son los eventos y de cuántas formas pueden ocurrir cada uno. Sin embargo, habrá situaciones más complejas donde seremos nosotros quienes determinamos los eventos a considerar, los cuales deben cumplir con que son excluyentes y que dichos eventos cubran todos los posibles casos. Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 9

Eliseo planea ir de la ciudad A a la ciudad B y de ahí a la ciudad C, cada uno de los 2 viajes puede hacerlo en camión, tren, auto o avión, pero con la condición de que al menos 1 de los viajes sea en avión, para no cansarse tanto. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Solución. Podemos dividir en dos eventos: Eliseo viaja de A a B en avión, o no viaja de A a B en avión. Si se va de A a B en avión, entonces hay 4 formas de completar su viaje (avión-tren, avión-camión, avión-auto, avión-avión), y si no se va de A a B en avión entonces hay 3 formas de completar su viaje (tren-avión, camión-avión, auto-avión), en total son $4+3=7$ formas de completar su viaje. Nótese que aquí fuimos nosotros quienes determinamos los eventos a considerar, los cuales son excluyentes y cubren todos los posibles casos

En muchas ocasiones, como se mencionó al final de la sección del principio de multiplicación con un ejemplo, habrá problemas en los que ambos principios sean utilizados en conjunto para poder resolverlos, veamos otro ejemplo

Ejemplo 10

Eliseo planea un nuevo viaje, ahora irá de la ciudad A a la ciudad B, luego a la ciudad C y finalmente a la ciudad D, puede hacerlo en camión, tren, auto o avión, pero con la condición de que a lo más 1 de los 3 viajes sea en avión, pues ya no tiene tanto dinero. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?



Solución:

Como tenemos una restricción, primero hay que dividir en eventos excluyentes que juntos consideren todos los posibles casos (para después sumarlos usando el principio de la suma), y para cada uno de estos eventos encontraremos el total de posibles viajes usando el principio de multiplicación. O bien ningún viaje es en avión, o bien uno de ellos es en avión, entonces los eventos que consideramos son los siguientes: el primero es que ninguno de los viajes se hace en avión, el segundo es que solo el viaje de A a B se hace en avión, el tercero es que solo el viaje de B a C es en avión, y el cuarto es que solo el viaje de C a D se hace en avión. Si ningún viaje es en avión, cada uno de los 3 viajes se hace en camión, tren o auto y usando el principio de multiplicación hay $3 \times 3 \times 3 = 27$ formas de hacerlo. Si se viaja de A a B en avión, entonces hay 3 formas de viajar de B a C y 3 formas de viajar de C a D, es decir, $3 \times 3 = 9$ formas. Análogamente, si solo se viaja en avión de B a C hay $3 \times 3 = 9$ formas, y si solo se viaja en avión de C a D hay $3 \times 3 = 9$ formas. Ahora, por el principio de la suma, las maneras totales en que Eliseo puede viajar son $27 + 9 + 9 + 9 = 54$ formas

7.3.1 Notación factorial

Sea n , un número entero y positivo, entonces el factorial de n , que se simboliza $n!$ y se lee “ n factorial”, es el producto de todos los enteros positivos desde 1 hasta n . Así.

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

$$\text{Obsérvese que } 5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3!$$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2!$$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!$$

$$\text{Por definición: } 0! = 1! = 1$$

7.3.1.1 operaciones con factoriales, combinaciones y permutaciones



Actividades de Apertura

Definimos una combinación, como un acomodo de “ n ” objetos diferentes, en subconjuntos de “ r ” elementos, (con $n \geq r$) en donde el orden en que están dispuestos los objetos, no importa.

La notación factorial es útil cuando se trata de calcular el número de posibles combinaciones o permutaciones para un evento dado.



Ejemplo 11; Se tienen 3 colores diferentes (por ejemplo, Verde, Amarillo y Café) y se desea saber ¿cuántas combinaciones diferentes de 2 colores son posibles?

Solución; Las combinaciones se pueden calcular “a píe”, del siguiente modo Verde-Amarillo, Verde-Café, Amarillo-Café, son tres posibilidades, es muy importante hacer notar que este resultado se podría calcular utilizando la siguiente fórmula para combinaciones:

$${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo 12. Seleccionar dos platillos de verduras de un menú en el que hay que cinco opciones diferentes.

Solución: ${}_5 C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!(3)!} = 10$

Ejemplo 13. De un grupo de 9 personas, se van a seleccionar 3, para experimentar una nueva vacuna contra el coronavirus, ¿Cuántos grupos diferentes de tres personas se pueden formar?

Solución: ${}_9 C_3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3!(6)!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

7.4 Combinaciones y Permutaciones



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=DhOeAPRXGxM>



Analiza los siguientes ejemplos

Ésta fórmula sirve para calcular el número de combinaciones con un total de “n” objetos en subgrupos de “r” y se lee del siguiente modo “n en r” y también si simboliza de la siguiente forma

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ para el ejemplo anterior } n = 3 \text{ colores y } r=2, \text{ (grupos de dos en dos).}$$

Utilizando la fórmula ${}_3 C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1(1)} = \frac{6}{2} = 3$

Es probable que hasta este punto pueda parecer trivial esta fórmula, sin embargo, resulta de extraordinaria utilidad cuando se trata de resolver situaciones como la siguiente:



Ejemplo 14: ¿Cuántas combinaciones de tres colores diferentes se pueden formar, si se tienen 10 colores disponibles?

Solución: Utilizando nuestra fórmula ${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_{10} C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} =$
 $= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! (10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! (7)!}$ cancelando términos 7! del numerador con 7! del
 denominador, $= \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ combinaciones posibles



Actividades de Cierre

Resuelva los siguientes problemas propuestos:

1. Con las 5 vocales cuantos grupos de 3 letras podemos formar teniendo en cuenta que ninguna letra se puede repetir y que el orden no importa.
2. De un grupo de 10 alumnos se seleccionan 5 para jugar en el equipo de basquetbol ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar? (considere que todos pueden jugar en cualquier posición).
3. En una final de futbol se seleccionan 5 jugadores de un equipo para el lanzamiento de penaltis. ¿Cuántos grupos diferentes se podrían formar?
4. En una carrera de caballos con 9 participantes tienes que elegir a los 3 caballos ganadores (no importa el orden de llegada). ¿Cuántos posibles resultados podrían darse?
5. Calcular el número de combinaciones de 8 elementos tomados de 4 en 4.
6. En una clase de 50 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?
7. En una bodega hay siete tipos diferentes de vinos. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro?
8. ¿Cuántas diagonales tiene un hexágono y cuántos triángulos se pueden formar con sus vértices?
9. A una fiesta asisten 12 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?



7.4.1 Permutaciones



Actividades de Apertura



Supón que tienes tres cifras diferentes, por ejemplo 1, 2, 3, ¿Cuántos números diferentes de dos cifras se pueden formar, sin que haya dos cifras iguales? La respuesta se puede ilustrar como sigue, 12, 13, 23, 21, 31, 32, claramente se entiende que 12 o 21, son dos números diferentes y cuenta como dos posibilidades distintas, esa es la diferencia respecto a las combinaciones, en combinaciones el orden no es relevante, en permutaciones el orden si es importante.

El número de permutaciones de un subconjunto de “r” elementos seleccionados de un conjunto de “n” elementos diferentes, está dado por: ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ algunos autores la expresan

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Si deseamos utilizar la fórmula para el ejemplo anterior

$${}_3 P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$



Actividades de Desarrollo

Analiza el siguiente ejemplo

Ejemplo 15: ¿De cuántas formas diferentes es posible agrupar las cifras 1, 2, 3, en grupos de tres?

Solución: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Lo anterior también podría enunciarse como ¿Cuántos números diferentes de tres cifras pueden formarse con los números 1, 2 y 3?

Utilizando la fórmula ${}_3 P_3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Recuerda que el factorial de cero se define igual a 1 ($0! = 1$)



Actividades de Cierre

Resuelva los siguientes problemas propuestos:

1. ¿Cuántas banderas diferentes, de tres franjas horizontales de igual ancho y de colores distintos, pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?
2. Una tienda de pinturas requiere diseñar muestrarios de los colores que vende, colocándolos en una fila de 5 lugares; si tienen 4 verdes diferentes, 5 amarillos diferentes, 2 azules diferentes y 3 rosados diferentes, calcula el número de muestrarios diferentes que se pueden diseñar si:
 - a) No hay restricción alguna
 - b) El primer color debe ser azul
 - c) El primero y el último deben ser verdes
3. Con todas las letras de la palabra DISCO, ¿Cuántas “palabras” distintas se pueden formar?
4. Un grupo de cuatro matrimonios asiste al teatro, calcula cuántas son las maneras como pueden sentarse en una fila si:
 - a) No existe restricción alguna
 - b) Los y las mujeres deben quedar alternados
5. La directiva de una asociación civil deberá tomarse una fotografía en la cual aparezcan sentados en fila, sus cinco directivos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse los cinco directivos?}
6. El gobierno de un Estado de la Federación, decide cambiar las placas de circulación de los automóviles particulares. Para ello, se considera incluir dos letras distintas del alfabeto, seguidas de tres dígitos distintos del 0 al 9 inclusive. ¿Cuántas placas podrían fabricarse con estas características?
7. Un funcionario de un Banco decide que los números de las tarjetas de crédito se cambien, de manera que no se repitan las letras o los números de cada una; mismas que incluirán dos letras del alfabeto, seguidas de cuatro dígitos. Calcula el número de tarjetas que se podrían fabricar.
8. Calcula el número de permutaciones diferentes que se pueden formar con las letras A, B, C, D, E, F que contengan 3 letras cada una.



9. Para tu clase de Literatura debes leer 3 libros en el semestre. Si tienes en casa 12 libros de distintos autores que te pueden interesar, determina de cuántas formas se pueden seleccionar los 3 libros.
10. Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si:
- Los libros de cada asignatura deben estar todos juntos.
 - Solamente los libros de matemáticas deben estar juntos

7.5 Teorema de Bayes

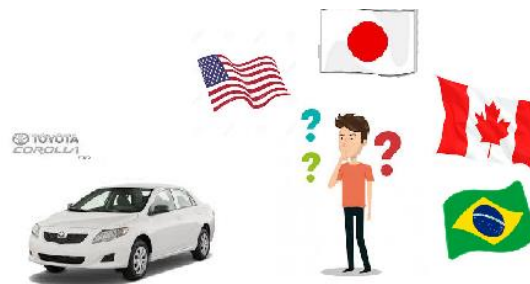


Introducción



En la vida cotidiana, tomamos muchas decisiones basándonos en información de conocidos, medios de comunicación, entre otros. Cuando decidimos que queremos comprar un teléfono celular, una motocicleta u otro artículo, lo hacemos considerando la fiabilidad, durabilidad o rendimiento de una marca. En la mayoría de casos desconocemos que estos artículos se producen en diferentes plantas en el mundo, cada instalación tiene sus propias estadísticas de calidad.

Cuando nuestro papá decide comprar un auto Toyota Corolla 2012, porque su hermano en Estados Unidos tiene uno y es excelente, no sabe que el auto que él comprará fue fabricado en Brasil, con especificaciones distintas al de su hermano fabricado en Canadá.



El Teorema de Bayes trata de establecer la probabilidad de que ocurra cierto evento (Auto sin fallas), considerando la ocurrencia de otro evento previo (Fabricado en Canadá o Brasil). El análisis y cálculo de estas probabilidades nos permiten tomar mejores decisiones



Actividades de Apertura



Imagina que para recabar fondos y pagar la graduación, un grupo de alumnos decide, hornear y vender mantecadas. Fátima pertenece a este grupo y sabe mucho de pastelería, pero no puede hacer todos panes, por lo que algunos de sus compañeros se ofrecen a cocinarlos en su casa con la receta y recomendaciones de Fátima. Como es lógico no a todos los alumnos les saldrán mantecadas perfectas. Si te dieran a escoger ¿Comprarías una de las mantecadas de Fátima o de otros de sus compañeros?, ¿Crees que el porcentaje de mantecadas casi perfectas será igual para todos los alumnos, aunque sea la misma receta? Socializa las opiniones y argumentalas.

Teorema de Bayes

Las particiones son varios eventos A_1, A_2, \dots, A_n , que forman un espacio muestral S , el teorema de Bayes combina al evento S con otro evento B por medio de la probabilidad condicional quedándonos la siguiente formula.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}$$



Observa el video y analiza.
https://youtu.be/c0r5-_52fwM



Ejemplo 1: Tres plantas de autos A, B y C producen respectivamente 50%, 30% y 20% del número total de autos de una marca, los porcentajes de desperfectos en estas plantas son 3%, 4% y 5%, si se selecciona al azar un auto, hallar la probabilidad de (a) que el auto sea defectuoso de la planta A y (b) este mismo auto no sea defectuoso de la planta C.



Solución:

El 50% de autos producidos en la planta A se escribe en forma decimal como 0.5, y el porcentaje de autos con desperfectos de esa planta es de 3%, o sea 0.03. Por lo anterior, el producto $(0.5 \cdot 0.03)$ hace referencia a la planta A. para las demás plantas es similar.



Autos defectuosos de la planta A.

$$a) P(A|B) = \frac{0.5 * 0.03}{(0.5 * 0.03) + (0.3 * 0.04) + (0.2 * 0.05)} = \frac{0.015}{0.037} = 40.54\%$$

Cuando nos solicitan el porcentaje de autos SIN desperfectos, debemos usar el complemento para llegar al 100%, es decir, si la planta C produce un 5% de autos defectuosos, producirá un 95% de autos NO defectuosos. Por lo anterior, para la planta C usaremos $(0.2 * 0.95)$. Para las demás plantas es similar el proceso.

Autos NO defectuosos de la planta C.

$$b) P(A|B) = \frac{0.2 * 0.95}{(0.5 * 0.97) + (0.3 * 0.96) + (0.2 * 0.95)} = \frac{0.19}{0.963} = 19.73\%$$

Ejemplo 2: En cierta escuela 4% de los hombres y 1% de las mujeres miden 1.80 metros o más, además 40% de los estudiantes son hombres, ahora bien, si se selecciona un estudiante al azar y mide más de 1.80 m, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución: El 1% de las mujeres miden 1.80 m o más, por lo que se escribe en forma decimal como 0.01, si el 40% de los estudiantes son hombres, el 60% del estudiantado será mujer, es decir trabajaremos con el producto $(0.6 * 0.01)$ para hacer referencia a las mujeres que cumplan las condiciones señaladas, para los hombres es similar.

Mujeres que miden 1.80 m o más.

$$P = (A|B) = \frac{0.6 * 0.01}{(0.4 * 0.04) + (0.6 * 0.01)} = \frac{0.006}{0.022} = 27.27\%$$



Actividades de Cierre

Cuando vayamos a realizar compras de artículos diversos, deberíamos incorporar varios criterios como son: calidad, relación costo-beneficio, durabilidad, pertinencia, uso que le daremos, opinión de expertos, etc.

Entre mayor sea el costo del artículo que vamos a adquirir o seleccionar, mayor deberá ser la cantidad de tiempo invertido en la investigación y valoración de las características del producto y sus posibles alternativas.

Existen muchas agencias gubernamentales e independientes que hacen estudios de calidad de variados productos, pero no sirven de mucho si nosotros no las consultamos. Algunos ejemplos:



EJERCICIO 1: Un equipo de fútbol se conforma de cuatro líneas de jugadores: portero (9%), defensas (37%), medios (27%) y delanteros (27%), donde los goles anotados por el equipo en cada línea son: portero 1 gol, defensas 11 goles, medios 15 goles y delanteros 23. Supongamos que en un partido se gana por un gol. ¿Qué probabilidad hay de que este fuera anotado (a) por la defensa, (b) por los medios y (c) por los delanteros?

$$\text{Total de goles} = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\% \text{ goles anotados por: Portero} = \underline{\quad} / \underline{\quad} = \underline{\quad}\%$$

$$\text{Defensas} = \underline{\quad} / \underline{\quad} = \underline{\quad}\%$$

$$\text{Medios} = \underline{\quad} / \underline{\quad} = \underline{\quad}\%$$

$$\text{Delanteros} = \underline{\quad} / \underline{\quad} = \underline{\quad}\%$$

Probabilidad de que un gol fuera anotado por LA DEFENSA

$$a) P(A|B) = \underline{\hspace{10cm}} = \quad \%$$

Probabilidad de que un gol fuera anotado por LOS MEDIOS

$$b) P(A|B) = \underline{\hspace{10cm}} = \quad \%$$

Probabilidad de que un gol fuera anotado por LOS DELANTEROS

$$c) P(A|B) = \underline{\hspace{10cm}} = \quad \%$$



EJERCICIO 2: A un congreso asisten 100 personas de las cuales 65 son hombres y 35 mujeres, se sabe que el 10% de los hombres y el 6% de las mujeres tienen estudios a nivel maestría. Si se selecciona un maestro al azar, ¿qué probabilidad existe de que sea (a) mujer y (b) hombre?

Probabilidad de que un asistente con grado de maestría sea MUJER

$$a) P(A|B) = \underline{\hspace{10cm}} = \quad \%$$

Probabilidad de que un asistente con grado de maestría sea HOMBRE

$$b) P(A|B) = \underline{\hspace{10cm}} = \quad \%$$



Fuentes consultadas

Fuenlabrada, S. (2010). Probabilidad y Estadística. México: Mc Graw Hill

García, A. (2019). Probabilidad y Estadística. México: Mx

Olvera, G. B. (2014). Estadística y Probabilidad. Ciudad de México: Pearson.

Pérez, M. L. (2016). Combinatoria. México D.F. Instituto de Matemáticas, UNAM.

Márquez Elías, M.A. (2007). Probabilidad y Estadística. México. FCE, DGETI.SEP

Martínez Vázquez, L. (2017). Probabilidad y Estadística. México: Book Mart

Robert Johnson & Patricia Kuby. (2012) Estadística Elemental, 11va Edición. Ciudad de México: CENGAGE

Rodríguez, M., Rodríguez, E. y Solís, L. (2015). Curso Taller de Combinatoria para profesores entrenadores de la Olimpiada de Matemáticas. México: UADY

Salazar, L. (2019). Probabilidad y Estadística. México: Patria

Sánchez Corona, O. (2010). Probabilidad y Estadística. México D.F. Mc Graw Hill

Silva, Jesús Martínez. (2011). Asómate a Las Matemáticas 5 Probabilidad Y Estadística. Ciudad de México: Progreso.



Directorio

Dr. Rafael Sánchez Andrade

Jefe de la Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Industrial y de Servicios

Ing. Luis Miguel Rodríguez Barquet

Director Académico de Innovación Educativa

Mtra. Laura Leal Sorcia

Subdirectora de Innovación Académica

MC Gerardo Valdés Bermudes

Presidente de la Academia Nacional de Matemáticas de la UEMSTIS

MC Luis Manuel Guerra Franco

Secretario de la Academia Nacional de Matemáticas de la UEMSTIS

MC Oscar Villalpando Barragán

Coordinador de la Mesa de trabajo de Probabilidad y Estadística

ME Omar Eduardo De la Torre Aldama

Edición de la obra





Academia Nacional de Matemáticas

Integrantes de la Academia Nacional de Matemáticas que participaron en la elaboración de ésta obra

Nombre	Plantel	Estado
Juan Carlos Díaz Puga	CBTIS 39	Aguascalientes
José Antonio Hirata Moyeda	CBTIS 140	Baja California
José Luis Colorado Betanzos	CBTIS 69	Baja California Sur
Ana María García Zúñiga	CETIS 2	CD. de México
Yudibeth Sánchez Castellanos	CETIS 138	Chiapas
Miguel Ángel Peña Ogaz	CBTIS 228	Chihuahua
Omar Eduardo De la Torre Aldama	CETIS 83	Coahuila
J. Armando Quezada López	CBTIS 89	Durango
Marcos Belisario González Loria	CBTIS 160	Estado de México
David Fernando López López	CBTIS 172	Guanajuato
Emilio Jaime Mendoza Gómez	CBTIS 199	Hidalgo
Eliseo Santoyo Teyes	CBTIS 226	Jalisco
Oscar Villalpando Barragán	CBTIS 12	Michoacán
Andrea Casillas Macias	CBTIS 94	Michoacán
Luis Manuel Guerra Franco	CBTIS 76	Morelos
Lucía Sánchez Ramos	CBTIS 74	Nuevo León
Eva Cruz Brena	CBTIS 183	Oaxaca
Julio Alberto González Negrete	CBTIS 86	Puebla
Gilmer de Jesús Pat Sánchez	CBTIS 111	Quintana Roo
Gerardo Valdés Bermudes	CBTIS 224	Sinaloa
Martín Vega Gómez	CETIS 128	Sonora
Norma Patricia Hernández Tamez	CBTIS 007	Tamaulipas
Miguel Constantino Hernández Pérez	CETIS 132	Tlaxcala
Miguel Ángel Pavón Cordero	CBTIS 48	Veracruz
Silvia Leonor Martínez Quijano	CBTIS 80	Yucatán
Efraín Reyes Cumplido	CBTIS 104	Zacatecas